Theorem 6. A necessary and sufficient condition that QF (M, f) is complete is that his standard connection $\overline{\Gamma}$ of events space $\overline{M}$ is complete.

УДК 514.76

В.М. Исаев, С.Е. Степанов

(Владимирский государственный педагогический университет)

ПРИМЕРЫ КИЛЛИНГОВОЙ И КОНФОРМНО КИЛЛИНГОВОЙФОРМ

§ 1. Введение и результаты

1.1. Рассмотрим на *n*-мерном многообразии M с линейной связностью ∇ без кручения произвольную геодезическую $\gamma : J \subset \mathbf{R} \to M$, отнесенную к аффинному параметру t. В этом случае $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0$ для касательного векторного поля $\frac{d\gamma}{dt}$ геодезической γ.

Дифференциальную *p*-форму $\omega \in C^{\infty}\Lambda^{p}M$ для $1 \le p \le n-1$ назовем *киллинговой* [1], если $(p-1)$-форма $i_{\frac{d\gamma}{dt}}\omega = \mathrm{trace}\left(\frac{d\gamma}{dt} \otimes \omega\right)$ будет ковариантно постоянной вдоль γ. В силу произвольности выбора геодезической γ последнее возможно [1] тогда и только тогда, когда $\nabla\omega \in C^{\infty}\Lambda^{p+1}M$, что равносильно выполнению уравнения

$$\nabla_{X_0}\omega(X_1, X_2, ..., X_p) + \nabla_{X_1}\omega(X_0, X_2, ..., X_p) = 0 \qquad (1.1)$$

для произвольных $X_0, X_1, X_2, ..., X_p \in C^{\infty}TM$. В работе [1] построен пример киллинговой *p*-формы на многообразии M с эквиаффинной связностью ∇. Здесь будет доказана

Лемма. *Компоненты* $\omega_{i_1 ... i_p}$ *киллинговой p-формы* ω *в n-мерном аффинном пространстве* $(1 \le p \le n-1)$ *имеют следующие выражения:*

$$\omega_{i_1 ... i_p} = A_{j i_1 ... i_p} x^j + B_{i_1 ... i_p}, \qquad (1.2)$$

где $A_{j i_1 ... i_p}$ *и* $B_{i_1 ... i_p}$ *-компоненты постоянных кососимметрических тензоров* A *и* B *в аффинной системе координат* $\{x^1, ..., x^n\}$.

Уравнения (1.1) давно и хорошо известны (см., напр., [2]) на (псевдо)римановом многообразии (M, g) под названием *уравнений Киллинга-Яно*. Удовлетворяющие им формы ω нашли свое приложение в релятивистской физике [2].

Обобщением понятия киллинговой p-формы служит понятие *конформно киллинговой p-формы* $\omega \in C^{\infty}\Lambda^{p+1}M$, определяемой следующими уравнениями [3]:

$$\nabla_{X_0}\omega(X_1,X_2,\dots,X_p)+\nabla_{X_1}\omega(X_0,X_2,\dots,X_p)=2\theta(X_2,\dots,X_p)g(X_0,X_1)- \tag{1.3}$$
$$\sum_{\alpha=2}^{p}(-1)^{\alpha}\left\{\theta\left(X_1,\dots,X_{\alpha-1},X_{\alpha+1},\dots,X_p\right)g(X_0,X_\alpha)+\theta\left(X_0,X_2,\dots,X_{\alpha-1},X_{\alpha+1},\dots,X_p\right)g(X_1,X_\alpha)\right\}$$

здесь $\theta=\frac{1}{n-p+1}\sum_{i=1}^{n}(\nabla\omega)\left(e_i,e_i,X_2,\dots,X_p\right)$ для локального поля ортонормированных реперов $\{e_1,\dots,e_n\}$ и произвольных $X_0,\dots,X_p\in C^{\infty}\Lambda^{p-1}M$. Важно отметить, что на римановом многообразии (M, g) постоянной кривизны K и, в частности, K = 0 ассоциированная (p – 1)-форма θ является киллинговой [3]. Следует отметить, что конформно киллинговы формы интенсивно изучались и нашли свое приложение в релятивистской электродинамике [4]. Будет доказана следующая

Теорема 1. Компоненты $\omega_{i_1\dots i_p}$ конформно киллинговой *p*-формы ω в *n*-мерном (1 ≤ p ≤ n – 1) евклидовом пространстве имеют следующие выражения:

$$\omega_{i_1\dots i_p}=A_{kji_1\dots i_p}x^k x^j+B_{ji_1\dots i_p}x^j+C_{i_1\dots i_p}, \tag{1.4}$$

где $A_{kji_1\dots i_p}, B_{ji_1\dots i_p}$ и $C_{i_1\dots i_p}$-компоненты постоянных кососимметрических по индексам $i_1, \dots, i_p$ тензоров A, B и C в ортонормированной системе координат $\{x^1,\dots,x^n\}$ подчиняются следующим условиям:

$$A_{kjii_2\dots i_p}+A_{kiji_2\dots i_p}=2A_{ki_2\dots i_p}\delta_{ij}-\sum_{\alpha=2}^{p}(-1)^{\alpha}(A_{kii_2\dots\bar{i}_\alpha\dots i_p}\delta_{ji_\alpha}+A_{kji_2\dots\bar{i}_\alpha\dots i_p}\delta_{ii_\alpha}), \tag{1.5}$$

$$B_{jii_2\dots i_p}+B_{iji_2\dots i_p}=2B_{i_2\dots i_p}\delta_{ij}-\sum_{\beta=2}^{p}(-1)^{\beta}(B_{ii_2\dots\bar{i}_\beta\dots i_p}\delta_{ji_\beta}+B_{ji_2\dots\bar{i}_\beta\dots i_p}\delta_{ii_\beta}) \tag{1.6}$$

для символа Кронекера δ_{ij} и

$$A_{ki_2\dots i_p}=\frac{1}{n-p+1}\sum_{j=1}^{n}A_{kjji_2\dots i_p},\ B_{i_2\dots i_p}=\frac{1}{n-p+1}\sum_{j=1}^{n}B_{jji_2\dots i_p}$$

(здесь и далее по тексту “подчеркивание” над индексом означает отсутствие последнего)

1.2. Рассмотрим в *n*-мерном евклидовом пространстве гиперсферу S^{n-1} единичного радиуса, киллингову и конформно киллингову *p*-формы, каждая из которых задается своими компонентами (1.2) и (1.4) соответственно. Тогда будут справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. *В n-мерном евклидовом пространстве p-форма* ω *с компонентами*

$$\omega_{i_1 \ldots i_p} = A_{ki_1 \ldots i_p} x^k \tag{1.7}$$

в ортонормированной системе координат $\{x^1, \ldots, x^n\}$ *с началом в центре гиперсферы единичного радиуса* S^{n-1} *задает на последней глобальным образом киллингову p-форму (*$1 \le p \le n-2$*) при условии, что* $A_{ki_1 \ldots i_p}$ *– постоянные.*

Теорема 3. *В n-мерном евклидовом пространстве p-форма* ω *с компонентами*

$$\omega_{i_1 \ldots i_p} = A_{kji_1 \ldots i_p} x^k x^j - A_{i_1 \ldots i_p} \tag{1.8}$$

в ортонормированной системе координат $\{x^1, \ldots, x^n\}$ *с началом в центре гиперсферы единичного радиуса* S^{n-1} *задает на последней глобальным образом конформно киллингову p-форму (*$1 \le p \le n-2$*) для* $A_{i_1 \ldots i_p} = \sum_{j=1}^{n} A_{i_1 jji_2 \ldots i_p}$ *и постоянных* $A_{kji_1 \ldots i_p}$.

1.3. Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект 00-01-0553.

§ 2. Доказательство утверждений

2.1. В этом пункте докажем лемму. Предварительно заметим, что в аффинном пространстве $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \frac{\partial}{\partial x^i}$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}$ для аффинной системы координат $\{x^1, \ldots, x^n\}$. На этом основании уравнение (1.1) перепишем в следующем виде:

$$\partial_j \omega_{ii_2 \ldots i_p} + \partial_i \omega_{ji_2 \ldots i_p} = 0, \tag{2.1}$$

где полагаем $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$. Продифференцируем левую и правую части каждого из уравнений системы (2.1) по переменной x^k, получим

$$\partial_k \partial_j \omega_{ii_2 \ldots i_p} + \partial_k \partial_i \omega_{ji_2 \ldots i_p} = 0. \tag{2.2}$$

В результате циклической замены индексов k, j и i получаем еще две аналогичные системы уравнений

$$\partial_j \partial_i \omega_{ki_2 \dots i_p} + \partial_j \partial_k \omega_{ii_2 \dots i_p} = 0, \tag{2.3}$$

$$\partial_i \partial_k \omega_{ji_2 \dots i_p} + \partial_i \partial_j \omega_{ki_2 \dots i_p} = 0. \tag{2.4}$$

Сложим почленно уравнения систем (2.2) и (2.3), а из результата также почленно вычтем уравнения системы (2.4). Вследствие этих действий получим систему уравнений вида:

$$\partial_k \partial_j \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0. \tag{2.5}$$

Из (2.5) с необходимостью следуют равенства (1.2), при этом условия на компоненты тензоров A и B следуют из самих равенств (1.2), а также из уравнений (2.1).

2.2. Докажем теорему 1. В евклидовом пространстве в ортонормированной системе координат $\{x^1, \dots, x^n\}$ метрический тензор $g_{ij} = \delta_{ij}$, а потому уравнения (1.3) предстанут в следующем виде:

$$\partial_j \omega_{ii_2 \dots i_p} + \partial_i \omega_{ji_2 \dots i_p} = 2\theta_{i_2 . i_p} \delta_{ij} - \sum_{\alpha=2}^{p} (-1)^{\alpha} (\theta_{ii_2 . i_\alpha . . i_p} \delta_{ji_\alpha} + \theta_{ji_2 . i_\alpha . . i_p} \delta_{ii_\alpha}). \tag{2.6}$$

Преобразованиями, аналогичными проведенным в пункте 2.1, из уравнений (2.6) выводим, что

$$\begin{gathered} 2\partial_k \partial_j \omega_{ii_2 \dots i_p} = 2(\partial_k \theta_{i_2 . i_p} \delta_{ji} + \partial_j \theta_{i_2 . . i_p} \delta_{ik} - \partial_i \theta_{i_2 . . i_p} \delta_{kj}) + \\ + \sum_{\alpha=2}^{p} (-1)^{\alpha} \{ \partial_i \theta_{ki_2 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_p} \delta_{ji_\alpha} + \partial_i \theta_{ji_2 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_p} \delta_{ki_\alpha} - \partial_k \theta_{ji_2 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_p} \delta_{ii_\alpha} - \\ - \partial_k \theta_{ii_2 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_p} \delta_{ji_\alpha} - \partial_j \theta_{ii_2 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_p} \delta_{ki_\alpha} - \partial_j \theta_{ki_2 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_p} \delta_{ii_\alpha} \}. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Продифференцируем левую и правую части каждого уравненя системы (2.7) по переменной x^m, тогда в правой части каждого уравнения получим нуль, поскольку (p – 1)-форма θ- киллингова и в силу леммы при повторном дифференцировании ее компоненты обратятся в нуль. В результате будем иметь уравнения вида:

$$\partial_m \partial_k \partial_j \omega_{i_1 \dots i_p} = 0. \tag{2.8}$$

Из (2.8) без труда выводятся равенства (1.4); при этом соотношения на компоненты постоянных тензоров A и B становятся очевидными, если принять во внимание уравнения (2.6) и равенства $\theta_{i_2 \dots i_p} = \frac{1}{n-p+1} \sum_{i=1}^{n} \partial_i \omega_{ii_2 \dots i_p}$.

2.3. Докажем теорему 2. Пусть гиперсфера S^{n-1}: $(x^1)^2+\ldots+(x^n)^2=1$ задается векторно параметрическим уравнением $X=X(u^1,\ldots,u^{n-1})$ в ортонормированной системе координат, за начало которой выберем центр гиперсферы S^{n-1}. Тогда $X_a=\partial_a X$ – касательные к гиперсфере S^{n-1} векторные поля с компонентами $x_a{}^i=\partial_a x^i$ для $\partial_a=\dfrac{\partial}{\partial u^a}$ и $a,b,c=1,\ \ldots,\ n-1$. При этом $\sum\limits_{i=1}^{n} x^i x_a{}^i=0$. Обозначим через $g_{ab}=\sum\limits_{i=1}^{n} x_a{}^i x_b{}^i$ – метрический тензор g сферы S^{n-1}, а через Γ_{ab}^c – символы Кристофеля, вычисляемые с помощью компонент g_{ab} тензора g. Тогда можем записать уравнения Гаусса для S^{n-1} в виде

$$\nabla_a x_b^i=\partial_a x_b^i-\Gamma_{ab}^c x_c^i=g_{ab}x^i\,. \tag{2.9}$$

Условие того, что *p*-форма ω касается гиперсферы S^{n-1} во всех ее точках имеет вид (см. [5] Chapter 8, § 1) : $\omega_{i_1 i_2\ldots i_p}x^{i_1}x_{a_2}^{i_2}\ldots x_{a_p}^{i_p}=0$. С учетом (1.2) условие касания киллинговой p-формы предстанет в следующей форме:

$$A_{ji_1i_2\ldots i_p}x^j x^{i_1}x_{a_2}^{i_2}\ldots x_{a_p}^{i_p}+B_{i_1i_2\ldots i_p}x^{i_1}x_{a_2}^{i_2}\ldots x_{a_p}^{i_p}=0\,.$$

В силу кососимметричности тензора A первая группа слагаемых обращается в нуль. На этом основании заключаем, что *p*-форма ω со следующими компонентами $\omega_{i_1\ldots i_p}=A_{ji_1i_2\ldots i_p}x^j$ касается S^{n-1} во всех ее точках. При этом для касательной составляющей $\omega_{a_1\ldots a_p}=\omega_{i_1\ldots i_p}x_{a_1}^{i_1}\ldots x_{a_p}^{i_p}=A_{ji_1\ldots i_p}x^j x_{a_1}^{i_1}\ldots x_{a_p}^{i_p}$ киллинговой *p*-формы ω согласно уравнений Гаусса (2.9) имеем:

$$\nabla_c\omega_{ba_2\ldots a_p}+\nabla_b\omega_{ca_2\ldots a_p}=(\partial_j\omega_{ii_2\ldots i_p}+\partial_i\omega_{ji_2\ldots i_p})x_c^j x_b^i x_{a_2}^{i_2}\ldots x_{a_p}^{i_p}+\omega_{ii_2\ldots i_p}(g_{cb}x^i x_{a_2}^{i_2}\ldots x_{a_p}^{i_p}+\ldots+$$

$$+g_{ca_p}x_b^i x_{a_2}^{i_2}\ldots x^{i_p})+\omega_{ji_2\ldots i_p}(g_{bc}x^j x_{a_2}^{i_2}\ldots x_{a_p}^{i_p}+\ldots+g_{ba_p}x_c^j x_{a_2}^{i_2}\ldots x^{i_p})\equiv 0\,,$$

т.е. $\omega(\omega_{a_1\ldots a_p})$ – киллингова *p*-форма на S^{n-1}.

В свою очередь, условие касания конформно киллинговой *p*-формы имеет вид:

$$A_{kjii_2..i_p}x^k x^j x^i x_{a_2}^{i_2}\ldots x_{a_p}^{i_p}+B_{jii_2..i_p}x^j x^i x_{a_2}^{i_2}\ldots x_{a_p}^{i_p}+C_{ii_2..i_p}x^i x_{a_2}^{i_2}\ldots x_{a_p}^{i_p}=0 \tag{2.10}$$

Если использовать известное тождество $A_{(kji)i_2\ldots i_p}=A_{(k(ji))i_2\ldots i_p}$ и соотношения (1.5) и (1.6), то равенство (2.10) можно представить в следующем виде:

$$A_{ki_2..i_p}x^k x_{a_2}^{i_2}\ldots x_{a_p}^{i_p}+B_{i_2..i_p}x_{a_2}^{i_2}\ldots x_{a_p}^{i_p}+C_{ii_2..i_p}x^i x_{a_2}^{i_2}\ldots x_{a_p}^{i_p}=0\,.$$

Поэтому, если $B_{i_2...i_p} = 0$ и при этом $A_{ki_2...i_p} + C_{ki_2...i_p} = 0$, то условия касания (2.10) формы ω будут выполняться автоматически.

Докажем теперь, что касательная составляющая *p*-формы ω с компонентами

$$\omega_{a_1...a_p} = \omega_{i_1...i_p} x^{i_1}_{a_1} ... x^{i_p}_{a_p} = A_{kji_1..i_p} x^k x^j x^{i_1}_{a_1} ... x^{i_p}_{a_p} - A_{i_1..i_p} x^{i_1}_{a_1} ... x^{i_p}_{a_p}$$

конформно киллингова *p*-форма на S^{n-1}. Для этого нетрудно проверить, что согласно (2.9) и (2.10) выполняются следующие равенства:

$$\nabla_c \omega_{ba_2...a_p} + \nabla_b \omega_{ca_2...a_p} = 2g_{cb}\theta_{a_2...a_p} - \sum_{\alpha=2}^{p} (-1)^\alpha \left(g_{ca_\alpha} \theta_{ba_2...a_{\alpha-1}a_{\alpha+1}...a_p} + g_{ba_\alpha} \theta_{ca_2...a_{\alpha-1}a_{\alpha+1}...a_p} \right),$$

где $\theta_{a_2...a_p} = A_{ki_2..i_p} x^k x^{i_2}_{a_2} ... x^{i_p}_{a_p}$, которые и доказывают требуемое.

Список литературы

1. *Степанов С.Е.* Техника Бохнера для *m*-мерного компактного многообразия с *SL*(*m*, **R**) – структурой // Алгебра и анализ. 1998. Т.10. №4. С. 192-209.
2. *Крамер Д. и др.* Точные решения уравнений Эйнштейна. М.: Энергоиздат, 1982.
3. *Kashiwada T.* On conformal killing tensor // Natural Science Report, Ochanomizi University. 1968. Vol.19. № 2. P. 67-74.
4. *Stepanov S.E.* On conformal Killing 2-form of the electromagnetic field // Journal of Geometry and Physics. 2000. Vol.33, № 3-4. P.191-209.
5. *Yano K.* Integral formulas in Riemannian geometry. Marcel Dekker, New York, 1970.

M. Isaev, S.E. Stepanov

INSTANCES OF KILLING AND CONFORMAL KILLING FORMS

Expressions of Killing form in the affine space and conformal Killing form in the Euclidean space are found. The instances of such form, given on the hypersphere globally, are listed.

УДК 514.75

И.Е. Лисицына

(Балтийский военно-морской институт)

АФФИННЫЕ НОРМАЛИ ГИПЕРПОЛОСЫ SH_m