7. *Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н.* Введение в топологию. М., 1995.

8. *Постников М.М.* Дифференциальная геометрия. Семестр 4. М., 1983.

M. Cheshkova

To geometry of one-sided surface

Normal vector is defined along a closed curve on the surfaces. If you return to the starting point and the normal direction coincides with the original, regardless of the choice of the curve, then the surface is called bilateral. Otherwise, we have the one-sided surface. The Mebius band is one-sided surface. Cross-cap, Klein bottle are also one-sided surfaces. The examples of these surfaces are constructed using the mathematical paskage Maple.

УДК 514.76

Ю.И. Шевченко
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
eckrydlova@kantiana.ru

Голономные и полуголономные подмногообразия гладких многообразий

С помощью структурных уравнений Лаптева дана иерархия гладких многообразий, рассматриваемых локально с точностью до второго порядка. Определены неголономное, полуголономное, голономное и тривиальное гладкие многообразия. Доказано, что подмногообразие полуголономного гладкого многообразия является полуголономным гладким многообразием, а подмногообразие голономного гладкого многообразия голономно.

Ключевые слова: гладкое многообразие, полуголономное многообразие, голономное многообразие, подмногообразие.

1. Иерархия гладких многообразий. Рассмотрим n-мерное многообразие M_n. Лаптев [1] показал, что в окрестности текущей точки A многообразия M_n можно ввести совокупность n линейно независимых дифференциальных форм Пфаффа ω^I $(I,... = \overline{1,n})$, причем интегралы u^I вполне интегрируемой системы уравнений $\omega^I = 0$ являются локальными координатами точки $A(u^I) \in M_n$. Условие полной интегрируемости системы $\omega^I = 0$ имеет вид

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \omega^I_J, \tag{1}$$

где ω^I_J — некоторые линейные формы.

Формы ω^I входят в деривационную формулу Акивиса [2]:

$$dA = \omega^I e_I,$$

где dA — вектор, показывающий направление смещения точки A по многообразию M_n с точностью до 1-го порядка, e_I — базисные векторы n-мерного векторного пространства T_n, касательного к многообразию M_n в точке A. Эта формула придает геометрическую наглядность аналитической фиксации точки A:

$$\omega^I = 0 \Leftrightarrow \omega^I e_I = \overline{0} \Leftrightarrow dA = \overline{0} \Leftrightarrow A = A_0.$$

Для продолжения структурных уравнений (1) продифференцируем их внешним образом и вынесем базисные формы ω^J:

$$(d\omega^I_J - \omega^K_J \wedge \omega^I_K) \wedge \omega^J = 0.$$

Разрешим кубичные уравнения по лемме Лаптева [1]:

$$d\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + \omega^K \wedge \omega^I_{JK}, \tag{2}$$

причем новые линейные формы удовлетворяют условиям

$$\omega^I_{JK} \wedge \omega^J \wedge \omega^K = 0 \Leftrightarrow \omega^I_{[JK]} \wedge \omega^J \wedge \omega^K \Leftrightarrow$$
$$\omega^I_{[JK]} = \lambda^I_{JKL} \omega^L, \ \lambda^I_{(JK)L} = 0, \ \lambda^I_{\{JKL\}} = 0, \tag{3}$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование, круглые скобки — симметрирование, а фигурные — циклирование. Назовем (3) условиями полуголономности гладкого многообразия M_n. Продолжая структурные уравнения (2), получим

$$d\omega^I_{JK} = \omega^L_{JK} \wedge \omega^I_L - \omega^I_{LK} \wedge \omega^L_J - \omega^I_{JL} \wedge \omega^L_K + \omega^L \wedge \omega^I_{JKL}, \tag{4}$$

$$\omega^I_{J[KL]} = \lambda^I_{JKLM} \omega^M, \qquad \lambda^I_{J(KL)M} = 0, \ \lambda^I_{J\{KLM\}} = 0.$$

Альтернируем структурные уравнения (4) по индексам *J*, *K*:

$$d\omega^I_{[JK]} = \omega^L_{[JK]} \wedge \omega^I_L - \omega^I_{L[K} \wedge \omega^L_{J]} - \omega^I_{[J|L|} \wedge \omega^L_{K]} + \omega^L \wedge \omega^I_{[JK]L}.$$

Во втором и третьем слагаемых раскроем альтернирования и проведем перегруппировку

$$d\omega^I_{[JK]} = \omega^L_{[JK]} \wedge \omega^I_L - \quad \omega^I_{[LK]} \wedge \omega^L_J - \omega^I_{[JL]} \wedge \omega^L_K + \omega^L \wedge \omega^I_{[JK]L}. \tag{5}$$

Продифференцируем уравнения (3_1) с помощью структурных уравнений (1, 5):

$$(\Delta\lambda^I_{JKL} + \omega^I_{[JK]L}) \wedge \omega^L = 0, \tag{6}$$

$$\Delta\lambda^I_{JKL} = d\lambda^I_{JKL} + \lambda^M_{JKL}\omega^I_M - \lambda^I_{MKL}\omega^M_J - \lambda^I_{JML}\omega^M_K - \lambda^I_{JKM}\omega^M_L.$$

Разрешим квадратичные уравнения (6) по лемме Картана и запишем результат в виде сравнений по модулю базисных форм ω^M:

$$\Delta\lambda^I_{JKL} + \omega^I_{[JK]L} \cong 0. \tag{7}$$

Утверждение 1. *Если формы* $\omega^I_{[JK]L}$ *сравнимы с нулем по модулю базисных форм, то дифференциальные сравнения (7) упрощаются:* $\Delta\lambda^I_{JKL} \cong 0$*, т. е. коэффициенты* λ^I_{JKL} *образуют тензор.*

Следствие. *Пусть* $\omega^I_{[JK]L} \cong 0$*, тогда инвариантны равенства* $\lambda^I_{JKL} = 0 \Leftrightarrow \omega^I_{[JK]} = 0$.

Если при рассмотрении многообразия M_n внимание обращается на структурные уравнения (1) для базисных форм ω^I, то будем говорить о гладком многообразии 1-го порядка M^1_n, а при существенном использовании системы (1, 2) назовем M_n многообразием 2-го порядка M^2_n.

Определение. Гладкое многообразие M^2_n, рассматриваемое локально с точностью до 2-го порядка, назовем:

1. *Неголономным* многообразием $\widetilde{M}^2_n$ (см.: [3]), если формы ω^I_{JK} не удовлетворяют условиям полуголономности (3).

2. *Полуголономным* многообразием $\overline{M}^2_n$, если формы ω^I_{JK} удовлетворяют условиям (3), но не являются симметричными: $\omega^I_{[JK]} \neq 0$.

3. *Голономным* многообразием $\widehat{M}^2_n$, если формы ω^I_{JK} симметричны, но не равны нулю.

4. *Тривиальным* многообразием $\overset{0}{M}{}^2_n$, если формы ω^I_{JK} обращаются в нуль.

Замечания

1. В определении задана иерархия гладких многообразий $\tilde{M}^2_n \to \overline{M}^2_n \to \widehat{M}^2_n \to \overset{0}{M}{}^2_n$, в которой каждое следующее многообразие является особым случаем предыдущего.

2. В результате продолжения структурных уравнений гладкого многообразия (1) можно получить уравнения (2) лишь для полуголономного $\overline{M}^2_n$, голономного $\widehat{M}^2_n$ и тривиального $\overset{0}{M}{}^2_n$ многообразий.

3. Структурные уравнения (2) для неголономного многообразия $\widetilde{M}_n^2$ не являются продолжениями уравнений (1), а должны вводиться иным путем.

4. Тривиальное гладкое многообразие 2-го порядка $\overset{0}{M}{}_n^2$ — аффинное пространство A_n.

2. Подмногообразия полуголономного и голономного гладких многообразий. В гладком многообразии 2-го порядка M_n^2 рассмотрим m-мерное подмногообразие V_m, описанное точкой A. Произведем разбиение значений индексов на две серии:

$$I = (i, \alpha); \quad i, \ldots = \overline{1, m}; \quad \alpha, \ldots = \overline{m+1, n}.$$

Уравнения подмногообразия V_m представим в виде

$$\omega^\alpha = \Lambda_i^\alpha \omega^i. \tag{8}$$

С помощью уравнений (1, 8) запишем структурные уравнения для базисных ω^i и главных ω^α форм подмногообразия V_m:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \Omega_j^i, \;\; \Omega_j^i = \omega_j^i + \Lambda_j^\alpha \omega_\alpha^i; \tag{9}$$

$$d\omega^\alpha = \omega^i \wedge \Omega_i^\alpha, \;\; \Omega_i^\alpha = \omega_i^\alpha + \Lambda_i^\beta \omega_\beta^\alpha; \tag{10}$$

причем (9_1) — структурные уравнения подмногообразия V_m.

Используя уравнения (9_1, 10_1), продолжим уравнение (8):

$$d\Lambda_i^\alpha - \Lambda_j^\alpha \Omega_i^j + \Omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega^j, \;\; \Lambda_{[ij]}^\alpha = 0. \tag{11}$$

Раскрывая обозначение (10_2), запишем уравнения (11_1) в виде

$$\underline{\Delta}\Lambda_i^\alpha + \omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega^j, \;\; \underline{\Delta}\Lambda_i^\alpha = d\Lambda_i^\alpha - \Lambda_j^\alpha \Omega_i^j + \Lambda_i^\beta \omega_\beta^\alpha. \tag{12}$$

Наконец, с помощью обозначения (9_2) уравнения (12_1) примут следующий вид

$$\Delta\Lambda_i^\alpha - \Lambda_j^\alpha \Lambda_i^\beta \omega_\beta^j + \omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega^j,\ \Delta\Lambda_i^\alpha = d\Lambda_i^\alpha - \Lambda_j^\alpha \omega_i^j + \Lambda_i^\beta \omega_\beta^\alpha. \quad (13)$$

Поскольку здесь нет трехиндексных форм, справедливо

Утверждение 2. *Фундаментальный объект 1-го порядка* Λ_i^α *подмногообразия* V_m *в многообразии 2-го порядка* M_n^2 *вне зависимости от того, является ли оно полуголономным* $\overline{M}_n^2$, *голономным* $\widehat{M}_n^2$, *либо аффинным пространством* A_n, *есть квадратично-квазитензорный объект, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (*13_1*).*

Найдем структурные уравнения для форм Ω_j^i, исходя из их выражений (9_2). Дифференцируем формы (9_2) и используем уравнения (8):

$$d\Omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + (d\Lambda_j^\alpha + \Lambda_j^\beta \omega_\beta^\alpha + \omega_j^\alpha) \wedge \omega_\alpha^i + \Lambda_j^\alpha \omega_\alpha^k \wedge \omega_k^i +$$
$$+\omega^k \wedge (\omega_{jk}^i + \Lambda_k^\alpha \omega_{j\alpha}^i + \Lambda_j^\alpha \omega_{\alpha k}^i + \Lambda_j^\alpha \Lambda_k^\beta \omega_{\alpha\beta}^i).$$

Воспользуемся уравнением (12_1) с учетом обозначения (12_2):

$$d\Omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \Lambda_k^\alpha \Omega_j^k \wedge \omega_\alpha^i + \Lambda_j^\alpha \omega_\alpha^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \Omega_{jk}^i, \quad (14)$$

$$\Omega_{jk}^i = \omega_{jk}^i + \Lambda_k^\alpha \omega_{j\alpha}^i + \Lambda_j^\alpha \omega_{\alpha k}^i + \Lambda_j^\alpha \Lambda_k^\beta \omega_{\alpha\beta}^i + \Lambda_{jk}^\alpha \omega_\alpha^i. \quad (15)$$

Преобразуем внешнее произведение $\omega_j^k \wedge \omega_k^i$ с помощью обозначения (9_2):

$$\omega_j^k \wedge \omega_k^i = \Omega_j^k \wedge \Omega_k^i - \Lambda_k^\alpha \Omega_j^k \wedge \omega_\alpha^i - \Lambda_j^\alpha \omega_\alpha^k \wedge \omega_k^i.$$

Подставляя это выражение в структурные уравнения (14), получим уравнения

$$d\Omega_j^i = \Omega_j^k \wedge \Omega_k^i + \omega^k \wedge \Omega_{jk}^i, \quad (16)$$

которые аналогичны уравнениям (2).

Утверждение 3. *Подмногообразие* V_m *, рассматриваемое с точностью до 2-го порядка, т.е.* V_m^2*, имеет структурные уравнения (9*$_1$*, 16), в которых формы* Ω_{jk}^i *выражаются по формуле (15).*

Выясним степень голономности [4] подмногообразия $V_m^2 \subset M_n^2$. Проальтернируем формы (15) по индексам j, k с учетом симметрии (11_2):

$$\Omega_{[jk]}^i = \omega_{[jk]}^i + \Lambda_{[k}^{\alpha}\omega_{j]\alpha}^i + \Lambda_{[j}^{\alpha}\omega_{\alpha k]}^i + \Lambda_{[j}^{\alpha}\Lambda_{k]}^{\beta}\omega_{\alpha\beta}^i. \tag{17}$$

Сумма 2-го и 3-го слагаемых, а также последнее слагаемое преобразуются:

$$\Lambda_{[k}^{\alpha}\omega_{j]\alpha}^i + \Lambda_{[j}^{\alpha}\omega_{\alpha k]}^i = \Lambda_k^{\alpha}\,\omega_{[j\alpha]}^i + \Lambda_j^{\alpha}\,\omega_{[\alpha k]}^i,$$

$$\Lambda_{[j}^{\alpha}\Lambda_{k]}^{\beta}\omega_{\alpha\beta}^i = \Lambda_j^{\alpha}\,\Lambda_k^{\beta}\,\omega_{[\alpha\beta]}^i.$$

Используем эти равенства в выражении (17):

$$\Omega_{[jk]}^i = \omega_{[jk]}^i + \Lambda_k^{\alpha}\,\omega_{[j\alpha]}^i + \Lambda_j^{\alpha}\,\omega_{[\alpha k]}^i + \Lambda_j^{\alpha}\,\Lambda_k^{\beta}\,\omega_{[\alpha\beta]}^i.$$

Учтем выражение (3_1):

$$\Omega_{[jk]}^i = \mu_{jkL}^i\omega^L,\ \mu_{jkL}^i = \lambda_{jkL}^i + \Lambda_k^{\alpha}\,\lambda_{j\alpha L}^i + \Lambda_j^{\alpha}\,\lambda_{\alpha kL}^i + \Lambda_j^{\alpha}\,\Lambda_k^{\beta}\,\lambda_{\alpha\beta L}^i. \tag{18}$$

В формуле (18_1) произведем разбиение индекса $L = (l, \alpha)$ и воспользуемся уравнениями (8):

$$\Omega_{[jk]}^i = \nu_{jkl}^i\omega^l,\ \nu_{jkl}^i = \mu_{jkl}^i + \mu_{jk\alpha}^i\Lambda_l^{\alpha}. \tag{19}$$

Покажем антисимметрию коэффициентов ν_{jkl}^i по индексам j, k. Просимметрируем выражение (19_2) по этим индексам:

$$\nu_{(jk)l}^i = \mu_{(jk)l}^i + \mu_{(jk)\alpha}^i\Lambda_l^{\alpha}. \tag{20}$$

Предварительно симметрируем выражение (18_2):

$$\mu^i_{(jk)L} = \lambda^i_{(jk)L} + \Lambda^\alpha_{(k}\lambda^i_{j)\alpha L} + \Lambda^\alpha_{(j}\lambda^i_{|\alpha|k)L} + \Lambda^\alpha_{(j}\Lambda^\beta_{k)}\lambda^i_{\alpha\beta L}.$$

Согласно равенствам (3_2) 1-е слагаемое обращается в нуль. В остальных слагаемых раскроем симметрирование и перегруппируем слагаемые, тогда

$$\mu^i_{(jk)L} = \Lambda^\alpha_k\lambda^i_{(j\alpha)L} + \Lambda^\alpha_j\lambda^i_{(\alpha k)L} + \Lambda^\alpha_j\Lambda^\beta_k\lambda^i_{(\alpha\beta)L} = 0$$

в силу равенств (3_2). Значит, по формуле (20) получим $\nu^i_{(jk)l} = 0$, что соответствует условию полуголомности для подмногообразия V_m, аналогичному условию (3_2).

Проверим, обращаются ли в нуль проциклированные по нижним индексам величины ν^i_{jkl}? Из формулы (19_2) имеем

$$\nu^i_{\{jkl\}} = \mu^i_{\{jkl\}} + \mu^i_{\{jk|\alpha|}\Lambda^\alpha_{l\}}. \tag{21}$$

Запишем одно слагаемое подробно с помощью обозначения (18_2):

$$\mu^i_{\{jkl\}} = \lambda^i_{\{jkl\}} + \Lambda^\alpha_{\{k}\lambda^i_{j|\alpha|l\}} + \Lambda^\alpha_{\{j}\lambda^i_{|\alpha|kl\}} + \Lambda^\alpha_{\{j}\Lambda^\beta_k\lambda^i_{|\alpha\beta|l\}}. \tag{22}$$

По условию (3_3) 1-е слагаемое равно нулю. В сумме 2-го и 3-го слагаемых раскроем циклирование и произведем перегруппировку

$$\Lambda^\alpha_{\{k}\lambda^i_{j|\alpha|l\}} + \Lambda^\alpha_{\{j}\lambda^i_{|\alpha|kl\}} = \frac{1}{3}\Lambda^\alpha_k(\lambda^i_{j\alpha l} + \lambda^i_{\alpha lj}) +$$
$$+\frac{1}{3}\Lambda^\alpha_j(\lambda^i_{l\alpha k} + \lambda^i_{\alpha kl}) + \frac{1}{3}\Lambda^\alpha_l(\lambda^i_{k\alpha j} + \lambda^i_{\alpha jk}).$$

В каждой скобке добавим и вычтем соответствующее слагаемое, затем используем условие (3_3):

$$\Lambda^\alpha_{\{k}\lambda^i_{j|\alpha|l\}} + \Lambda^\alpha_{\{j}\lambda^i_{|\alpha|kl\}} = -\frac{1}{3}\Lambda^\alpha_k\lambda^i_{lj\alpha} - \frac{1}{3}\Lambda^\alpha_j\lambda_{kl\alpha} - \frac{1}{3}\Lambda^\alpha_l\lambda^i_{jk\alpha} =$$
$$= -\Lambda^\alpha_{\{l}\lambda^i_{jk\}\alpha}.$$

Подставим полученные результаты в формулу (22):

$$\mu^i_{\{jkl\}} = -\Lambda^\alpha_{\{l}\lambda^i_{jk\}\alpha} + \Lambda^\alpha_{\{j}\Lambda^\beta_k\lambda^i_{|\alpha\beta|l\}}. \qquad (23)$$

Запишем 2-е слагаемое из формулы (21) подробно с помощью обозначения (18_2):

$$\begin{aligned}\mu^i_{\{jk|\alpha|}\Lambda^\alpha_{l\}} &= \lambda^i_{\{jk|\alpha|}\Lambda^\alpha_{l\}} + \Lambda^\beta_{\{k}\lambda^i_{j|\beta\alpha|}\Lambda^\alpha_{l\}} + \Lambda^\beta_{\{j}\lambda^i_{|\beta|k|\alpha|}\Lambda^\alpha_{l\}} + \\ &+ \Lambda^\beta_{\{j}\Lambda^\gamma_k\lambda^i_{|\beta\gamma\alpha|}\Lambda^\alpha_{l\}}.\end{aligned} \qquad (24)$$

Преобразуем последнее слагаемое, раскрывая циклирование:

$$\Lambda^\beta_{\{j}\Lambda^\gamma_k\lambda^i_{|\beta\gamma\alpha|}\Lambda^\alpha_{l\}} = \frac{1}{3}(\Lambda^\beta_j\Lambda^\gamma_k\lambda^i_{\beta\gamma\alpha}\Lambda^\alpha_l + \Lambda^\beta_k\Lambda^\gamma_l\lambda^i_{\beta\gamma\alpha}\Lambda^\alpha_j + \Lambda^\beta_l\Lambda^\gamma_j\lambda^i_{\beta\gamma\alpha}\Lambda^\alpha_k).$$

Во 2-м слагаемом сделаем замену индексов $\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$, а в 3-м — замену $\alpha \to \gamma \to \beta \to \alpha$, тогда

$$\begin{aligned}\Lambda^\beta_{\{j}\Lambda^\gamma_k\lambda^i_{|\beta\gamma\alpha|}\Lambda^\alpha_{l\}} &= \frac{1}{3}(\Lambda^\beta_j\Lambda^\gamma_k\lambda^i_{\beta\gamma\alpha}\Lambda^\alpha_l + \Lambda^\gamma_k\Lambda^\alpha_l\lambda^i_{\gamma\alpha\beta}\Lambda^\beta_j + \Lambda^\alpha_l\Lambda^\beta_j\lambda^i_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\gamma_k) = \\ &= \Lambda^\beta_j\Lambda^\gamma_k\Lambda^\alpha_l\lambda^i_{\{\alpha\beta\gamma\}} = 0\end{aligned}$$

согласно свойству (3_3). Значит, формула (24) имеет вид

$$\mu^i_{\{jk|\alpha|}\Lambda^\alpha_{l\}} = \lambda^i_{\{jk|\alpha|}\Lambda^\alpha_{l\}} + \Lambda^\beta_{\{k}\lambda^i_{j|\beta\alpha|}\Lambda^\alpha_{l\}} + \Lambda^\beta_{\{j}\lambda^i_{|\beta|k|\alpha|}\Lambda^\alpha_{l\}}. \qquad (25)$$

Подставляя выражения (23, 25) в формулу (21), получим

$$\nu^i_{\{jkl\}} = \Lambda^\alpha_{\{j}\Lambda^\beta_k\lambda^i_{|\alpha\beta|l\}} + \Lambda^\beta_{\{k}\lambda^i_{j|\beta\alpha|}\Lambda^\alpha_{l\}} + \Lambda^\beta_{\{j}\lambda^i_{|\beta|k|\alpha|}\Lambda^\alpha_{l\}} = 0. \qquad (26)$$

Теорема. *Подмногообразие V_m полуголономного гладкого многообразия $\overline{M}_n$ является полуголономным многообразием $\overline{V}_m$.*

Следствие. *Подмногообразие V_m голономного гладкого многообразия $\widehat{M}_n$ есть голономное многообразие $\widehat{V}_m$.*

Список литературы

1. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семинара. ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

2. *Акивис М.А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977.

3. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

4. *Скрыдлова Е.В., Шевченко Ю.И.* Классификация гладких многообразий по степени неголономности // Актуальные вопр. геом. и ее приложения. Ташкент, 2014. С. 205—208.

Yu. Shevchenko

Holonomic and semi-holonomic submanifolds of smooth manifolds

By means of the structure equations of Laptev the hierarchy of smooth manifolds, which are considered locally to within the second order is given. Non-holonomic, semi-holonomic, holonomic and trivial smooth manifolds are defined. It is proved that the submanifold of semi-holonomic smooth manifold is semi-holonomic manifold and submanifold of holonomic smooth manifold is holonomic.