УДК 514.76

С. В. Галаев[1]

[1] *Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*

sgalaev@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1129-7159

doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-9

О геометрии субримановых η-Эйнштейновых многообразий

На субримановом многообразии контактного типа рассматривается связность ∇^{ψ} с кручением, названная в работе Ψ-связностью. Ψ-связность является частным случаем N-связности. На субримановом многообразии Ψ-связность определяется с помощью эндоморфизма $\psi : D \to D$ распределения *D*, названного в работе структурным эндоморфизмом. Эндоморфизм ψ однозначно задается следующими соотношениями: $\psi\vec{\xi} = 0$, $\omega(\vec{x},\vec{y}) = g(\psi\vec{x},\vec{y})$, $\vec{x},\vec{y} \in \Gamma(D)$. Если распределение субриманова многообразия интегрируемо, то Ψ-связность относится к классу четверть-симметрических связностей. Доказывается, что Ψ-связность является метрической связностью тогда и только тогда, когда структурное векторное поле субримановой структуры киллингово. Выводится формула, выражающая Ψ-связность через связность Леви-Чивиты субриманова многообразия. Вычисляются компоненты тензоров кривизны и тензоров Риччи Ψ-связности и связности Леви-Чивиты. Доказывается, что если субриманово многообразие является η-Эйнштейновым многообразием, то оно является η-Эйнштейновым многообразием и относительно Ψ-связности. Обратное выполняется лишь при

Поступила в редакцию 13.03.2019 г.

условии, что след квадрата структурного эндоморфизма Ψ является константой, не зависящей от точки многообразия. Статья заканчивается теоремой, утверждающей, что сасакиево многообразие M является η-Эйнштейновым многообразием тогда и только тогда, когда M — η-Эйнштейново многообразие относительно Ψ-связности.

Ключевые слова: субриманово многообразие, внутренняя связность, Ψ-связность, η-Эйнштейново многообразие.

Введение

Субримановым многообразием контактного типа называется гладкое многообразие *M*, оснащенное субримановой структурой $\left(M,\vec{\xi},\eta,g\right)$, где η и $\vec{\xi}$ — 1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и $D^{\perp}$. Субриманово многообразие является естественным обобщением почти контактного метрического многообразия. Вместо структурного эндоморфизма φ такого, что $\varphi^2=-I+\eta\otimes\vec{\xi}$, на субримановом многообразии естественным образом определяется эндоморфизм $\psi:D\to D$ распределения *D*, названный в настоящей работе структурным эндоморфизмом и определяемый равенствами $\psi\vec{\xi}=0$, $\omega(\vec{x},\vec{y})=g(\psi\vec{x},\vec{y})$, $\vec{x},\vec{y}\in\Gamma\left(D\right)$. В работе рассматривается линейная связность ∇^{ψ} с кручением $S(\vec{x},\vec{y})$, названная Ψ-связностью и однозначно определяемая следующими условиями:

1) $S(\vec{x},\vec{y})=2\omega(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi}+\eta(\vec{x})\psi\vec{y}-\eta(\vec{y})\psi\vec{x}$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\Gamma\left(TM\right)$;

2) $\nabla^{\psi}_{\vec{x}}g(\vec{y},\vec{z})=0$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\Gamma\left(D\right)$;

3) $\nabla^{\psi}_{\vec{x}}\vec{\xi}=0,\ \vec{x}\in\Gamma(TM)$;

4) $\nabla^{\psi}_{\vec{x}}\eta=0,\ \vec{x}\in\Gamma(TM)$,

где ∇ — внутренняя связность субриманова многообразия.

Понятие η-Эйнштейнова многообразия введено Окумурой [11]. η-Эйнштейновым многообразием названо многообразие Сасаки с тензором Риччи $\tilde{r}$, имеющим следующее строение: $\tilde{r}=ag+b\eta\otimes\eta,\ \ a,b\in R.$ Позже понятие η-Эйнштейнова многообразия было перенесено на более широкий класс почти контактных метрических многообразий [12]. В настоящей работе изучаются η-Эйнштейновы субримановы многообразия. Приводится описание таких многообразий в терминах Ψ-связности.

Определение и основные свойства Ψ-связности

Пусть M — гладкое многообразие размерности n с заданной на нем субримановой структурой $\left(M,\vec{\xi},\eta,g,D\right)$, где η и $\vec{\xi}$ 1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и $D^{\perp}$. Внутренней линейной связностью ∇ [1—3] на субримановом многообразии называется отображение $\nabla:\Gamma(D)\times\Gamma(D)\to\Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}}=f_1\nabla_{\vec{x}}+f_2\nabla_{\vec{y}}$,

2) $\nabla_{\vec{x}}f\vec{y}=\left(\vec{x}f\right)\vec{y}+f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}$,

3) $\nabla_{\vec{x}}\left(\vec{y}+\vec{z}\right)=\nabla_{\vec{x}}\vec{y}+\nabla_{\vec{x}}\vec{z}$,

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D). Известно [6; 7], что на субримановом многообразии существует единственная внутренняя связность ∇ с нулевым кручением такая, что $\nabla_{\vec{x}} g(\vec{x},\vec{y}) = 0$. Кручение внутренней линейной связности *S* по определению полагается равным

$$S\left(\vec{x},\vec{y}\right) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x},\vec{y}],$$

где *P: TM→D* — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^{\perp}$.

Карту $K(x^{\alpha})$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n;\ a, b, c = 1, ..., n-1$) многообразия *M* будем называть адаптированной к распределению *D*, если $\partial_n = \vec{\xi}$ [9]. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ порождают систему *D*: $D = span(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии *M* неголономное поле базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \eta = \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $\left[\vec{e}_a, \vec{e}_b\right] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Условие $\vec{\xi} \in \ker\omega$ влечет справедливость равенства $\partial_n \Gamma_a^n = 0$. Пусть $K(x^{\alpha})$ и $K'(x^{\alpha'})$ — адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат:

$$x^a = x^a\left(x^{a'}\right),\ x^n = x^{n'} + x^n\left(x^{a'}\right).$$

Пусть $\tilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивиты и $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}$ — ее коэффициенты. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 1. *Коэффициенты связности Леви-Чивиты субриманова многообразия в адаптированных координатах имеют вид*

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^{c} = \Gamma_{ab}^{c},\ \tilde{\Gamma}_{ab}^{n} = \omega_{ba} - C_{ab},$$

$$\tilde{\Gamma}_{an}^{b} = \tilde{\Gamma}_{na}^{b} = C_a^b + \psi_a^b,\ \tilde{\Gamma}_{na}^{n} = \tilde{\Gamma}_{nn}^{a} = 0,$$

где

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc} \right),$$

$$\psi^b_a = g^{bc} \omega_{ac},$$

$$C_{ab} = \frac{1}{2} \partial_n g_{ab}, \; C^b_a = g^{bc} C_{ac}.$$

Коэффициенты связности ∇^ψ обозначим символами $G^\alpha_{\beta\gamma}$.

Предложение 2. *На субримановом многообразии существует единственная линейная связность* ∇^ψ *с кручением* $S(\vec{x}, \vec{y})$, *однозначно определяемая следующими условиями:*

1) $S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})\psi\vec{y} - \eta(\vec{y})\psi\vec{x}, \; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$;

2) $\nabla^N_{\vec{x}} g(\vec{y}, \vec{z}) = 0, \; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$; $\nabla^\psi_{\vec{x}} \vec{y} = \nabla_{\vec{x}} \vec{y}, \; \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$;

3) $\nabla^\psi_{\vec{x}} \vec{\xi} = 0, \; \vec{x} \in \Gamma(TM)$;

4) $\nabla^\psi_{\vec{x}} \eta = 0, \; \vec{x} \in \Gamma(TM)$.

Доказательство. Из предположения существования связности докажем ее единственность. Получим явное выражение для коэффициентов $G^\alpha_{\beta\gamma}$ связности ∇^ψ в адаптированных координатах. Условия 1), 2) определяют коэффициенты $G^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc} \right)$. Из условий 3), 4) следует справедливость следующих равенств:

$$G^a_{bn} = G^n_{an} = G^a_{nn} = G^n_{ab} = G^n_{nb} = G^n_{nn} = 0.$$

Повторно используя условие 1), получаем, что $G^b_{na} = \psi^b_a$. Что и доказывает единственность. Определим теперь отличные от нуля коэффициенты связности $\nabla^{\psi}_{\vec{x}}$, положив $G^{a}_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc} \right)$, $G^{b}_{na} = \psi^{b}_{a}$. Непосредственно проверяется, что определяемая тем самым связность удовлетворяет условиям 1) — 4). Предложение доказано.

Теорема 1. *Линейная связность* ∇^{ψ}, *заданная на субримановом многообразии, метрическая тогда и только тогда, когда* $L_{\vec{\xi}}\, g = 0$.

Доказательство. Из предложения 2 следует, что $\nabla^{\psi}_{c} g_{ab} = 0$. Вычислим $\nabla^{\psi}_{n} g_{ab}$. Имеем:

$$\nabla^{\psi}_{n} g_{ab} = \partial_n g_{ab} - \psi^{c}_{a} g_{cb} + \psi^{c}_{b} g_{ac} =$$

$$= \partial_n g_{ab} + g^{cd} \omega_{da} g_{cb} + g^{cd} \omega_{db} g_{ac} =$$

$$= \partial_n g_{ab} + \omega_{ab} + \omega_{ba} = \partial_n g_{ab}.$$

В дальнейшем будем полагать, что выполняется равенство $\partial_n g_{ab} = 0$.

Используя адаптированные координаты, убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 3. *Для связности Леви-Чивиты* $\tilde{\nabla}$ *и* Ψ*-связности* ∇^{ψ} *выполняется следующее соотношение:*

$$\nabla^{\psi}_{\vec{x}} \vec{y} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y} - \eta(\vec{x}) \tilde{\nabla}_{\vec{y}} \vec{\xi} - \eta(\vec{y}) \tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{\xi} + \omega\left(\vec{x}, \vec{y}\right) \vec{\xi} + \eta(\vec{x}) \psi \vec{y}.$$

Пусть $\tilde{R}(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$, $K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$, — тензоры кривизны связностей $\tilde{\nabla}$, ∇^{ψ} соответственно.

Вычислим необходимые для дальнейшего ненулевые компоненты тензоров $\tilde{R}(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$, $K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$. Имеем:

$$\tilde{R}^{d}_{abc} = R^{d}_{abc} + \psi^{d}_{a} \omega_{cb} + \psi^{d}_{b} \omega_{ac},$$

$$\tilde{R}^n_{anc} = \partial_n \omega_{ac} + \psi^e_c \omega_{ea},$$

$$\tilde{R}^d_{abn} = 2\nabla_{[a}\psi^d_{b]},$$

$$\tilde{R}^a_{ncb} = K^a_{ncb} = -\nabla_c \psi^a_b,$$

$$K^d_{abc} = R^d_{abc}.$$

Здесь $R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a|e|}\Gamma^e_{b]c}$ — компоненты тензора кривизны Схоутена [10], определяемые равенством

$$R(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x},\vec{y}]}\vec{z} - P\big[Q[\vec{x},\vec{y}],\vec{z}\,\big],$$

$$Q = I - P.$$

Заметим, что $\partial_n \omega_{ac} = 0$, так как $d\omega = 0$.

Пусть $\tilde{r}(\vec{x},\vec{y})$, $k(\vec{x},\vec{y})$ — соответствующие тензорам $\tilde{R}(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$, $K(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ тензоры Риччи. Назовем субриманово многообразие η-Эйнштейновым многообразием, если выполняется равенство

$$\tilde{r} = ag + b\eta \otimes \eta, \quad a,b \in R.$$

Теорема 2.

1. Пусть M — субриманово η-Эйнштейново многообразие, для которого выполняется равенство

$$\tilde{r} = ag + b\eta \otimes \eta.$$

Тогда M — η-Эйнштейново многообразие относительно связности ∇^ψ*. При этом выполняется равенство*

$$k = ag - a\eta \otimes \eta.$$

2. Пусть M — субриманово η-Эйнштейново многообразие относительно связности ∇^ψ*. Тогда если* $tr(\psi^2) = b$, $b \in R$, *то M — η-Эйнштейново многообразие. При этом выполняется равенство*

$$\tilde{r} = ag + (b-a)\eta \otimes \eta.$$

Доказательство. Вычислим компоненты тензоров Риччи k, $\tilde{r}$ в адаптированных координатах. Имеем:

$$\tilde{r}_{ac} = k_{ac}, \ \tilde{r}_{an} = \tilde{r}_{na} = -\nabla_b \psi_a^b, \ \tilde{r}_{nn} = \psi_a^b \psi_b^a,$$

$$k_{an} = 0, \ k_{na} = -\nabla_b \psi_a^b, \ k_{nn} = 0.$$

Пусть M — субриманово η-Эйнштейново многообразие, для которого выполняется равенство $\tilde{r} = ag + b\eta \otimes \eta.$ Отсюда следует, что

$$\tilde{r}_{an} = \tilde{r}_{na} = -\nabla_b \psi_a^b = 0.$$

В этом случае из полученного выше равенства $k_{na} = -\nabla_b \psi_a^b$ следует, что $k_{an} = k_{na} = 0.$ В свою очередь, воспользовавшись равенством $k_{nn} = 0,$ мы можем записать верное числовое равенство $k_{nn} = ag(\partial_n, \partial_n) - a\eta(\partial_n)\eta(\partial_n).$ Что и доказывает первую часть теоремы.

Пусть M — субриманово многообразие, являющееся η-Эйнштейновым многообразием относительно связности ∇^ψ:

$$k = ag + a\eta \otimes \eta.$$

В этом случае $k_{na} = -\nabla_b \psi_a^b = 0.$ Отсюда следует, что

$$\tilde{r}_{an} = \tilde{r}_{na} = -\nabla_b \psi_a^b = 0.$$

Если $tr(\psi^2) = b, \ \ b \in R,$ то справедливо следующее равенство:

$$\tilde{r}_{nn} = b = ag(\partial_n, \partial_n) + (b - a)\eta(\partial_n)\eta(\partial_n).$$

Так как $\tilde{r}_{ac} = k_{ac},$ окончательно получаем

$$\tilde{r} = ag + (b - a)\eta \otimes \eta.$$

Тем самым теорема доказана.

Пример. Пусть M — многообразие Сасаки. В этом случае $\psi = -\varphi$, где φ — эндоморфизм, удовлетворяющий равенствам

$$\varphi\vec{\xi} = \vec{0}, \ \ \varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}, \ \ \eta \circ \varphi = 0.$$

Справедливыми также являются равенства

$$tr(\psi^2) = -2m = -(n-1), \ \ \nabla^{\varphi}\varphi = 0.$$

Теорема 3. *Сасакиево многообразие M является η-Эйнштейновым многообразием тогда и только тогда, когда M — η-Эйнштейново относительно Ψ-связности.*

Замечания.

1. В работе [4] введено понятие многообразие Схоутена — Эйнштейна как такого почти контактного метрического многообразия, для которого выполняется следующее условие:

$$r(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda g(\vec{x}, \vec{y}), \ \ \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D) \ \ \ \lambda \in R,$$

где $r(\vec{x}, \vec{z}) = tr(\vec{y} \to R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}), \ \ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$ — тензор Схоутена — Риччи.

Там же была доказана теорема, указывающая на принципиальное значение внутренних инвариантов для геометрии почти контактных метрических многообразий.

Теорема. *Пусть M — K-контактное метрическое многообразие, тогда:*

1) если M — многообразие Сасаки, то оно является многообразием Схоутена — Эйнштейна;

2) если M — многообразие Схоутена — Эйнштейна, то оно является η-Эйнштейновым многообразием тогда и только тогда, когда $\nabla_c \varphi_a^c = 0$.

2. Ψ-связность ∇^{ψ} представляет специальный класс N-связностей [8]. Задавая надлежащим образом эндоморфизм $N : D \to D$, получаем следующие классы N-связностей для случая почти контактных метрических многообразий:

1) связность Бежанку ∇^B с нулевым эндоморфизмом $N = 0$. Бежанку [8] определяет связность ∇^B на почти контактном метрическом многообразии с помощью формулы

$$\nabla^B_{\vec{x}}\vec{y} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y} - \eta(\vec{x})\tilde{\nabla}_{\vec{y}}\vec{\xi} - \eta(\vec{y})\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{\xi} + (\omega + c)\left(\vec{x}, \vec{y}\right)\vec{\xi}.$$

В адаптированных координатах отличными от нуля компонентами $\Gamma^{B\alpha}_{\beta\gamma}$ связности ∇^B являются

$$\Gamma^{Ba}_{bc} = \Gamma^{a}_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}\left(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}\right).$$

В случае многообразия Сасаки тензор кривизны связности Бежанку совпадает с тензором кривизны Схоутена. Построенная Бежанку связность, вообще говоря, не является метрической. Так как $\nabla^B_n g_{ab} = \partial_n g_{ab}$, то метричность связности Бежанку эквивалентна К-контактности контактной метрической структуры. N-связность ∇^N на многообразии с почти контактной метрической структурой с заданным эндоморфизмом $N : D \to D$ может быть определена с помощью равенства $\nabla^N_{\vec{x}}\vec{y} = \nabla^B_{\vec{x}}\vec{y} + \eta(\vec{x})N\vec{y}$;

2) связность Танака — Вебстера ∇^{TW} определяется как единственная связность, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\nabla^{TW}\eta = 0$,

2) $\nabla^{TW}\vec{\xi} = 0$,

3) $\nabla^{TW}g = 0$,

4) $S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$,

5) $S(\vec{\xi}, \varphi\vec{x}) = -\varphi S(\vec{\xi}, \vec{x}), \quad \vec{x} \in \Gamma(TM)$.

Связность ∇^{TW} является N-связностью в случае, когда $N = C$;

3) связность Схоутена — ван Кампена ∇^{Sk} определяется с помощью равенства $\nabla^{Sk}_{\vec{x}}\vec{y} = (\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y}^h)^h + (\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y}^v)^v$, где $\vec{y}^h = P\vec{y}$, $\vec{y}^v = Q\vec{y}$. Непосредственно проверяется, что связность Схоутена — ван Кампена является N-связностью для случая, когда $N = C - \varphi$;

4) φ-связности исследовались в работе [5]. Для K-контактных метрических пространств φ-связность совпадает со связностью Схоутена — ван Кампена.

Список литературы

1. *Букушева А.В.* О геометрии слоений на распределениях с финслеровой метрикой // Известия Пензенского педагогического университета им. В.Г. Белинского. Физико-математические и технические науки. 2012. № 30. С. 33—38.

2. *Букушева А.В.* Нелинейные связности и внутренние полупульверизации на распределении с обобщенной лагранжевой метрикой // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 58—62.

3. *Букушева А.В.* Изометрические преобразования продолженных почти контактных метрических структур с метрикой полного лифта // Диф. геом. многообр. фигур. 2016. Вып. 47. С. 39—47.

4. *Букушева А.В.* О геометрии многообразия Схоутена — Эйнштейна // NovaInfo.Ru. 2018. Т. 1, № 92. С. 6—10.

5. *Букушева А.В., Галаев С.В.* Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2017. Вып. 48. С. 32—41.

6. *Галаев С.В.* Гладкие распределения с допустимой гиперкомплексной псевдо-эрмитовой структурой // Вестник Башкирского университета. 2016. Т. 21, № 3. С. 551—555.

7. *Галаев С.В.* Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, №3. С. 263—272.

8. *Галаев С.В.* Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, № 3 (59). С. 53—63.

9. *Bukusheva A.V., Galaev S.V.* Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol. 4 (53), № 2. P. 13—22.

10. *Galaev S.V.* Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, № 1. P. 71—76.

11. *Okumura M.* Some remarks on space with a certain contact structure // Tohoku Math. J. 1962. Vol. 14. P. 135—145.

12. *Sparks J.* Sasaki — Einstein manifolds. Surveys in differential geometry. Vol. XVI : Geometry of special holonomy and related topics. Somerville, MA, 2011. P. 265—324.

S. Galaev[1]

[1] Saratov State University

83 Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russia

sgalaev@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1129-7159

doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-9

On geometry of sub-Riemannian η-Einstein manifolds

Submitted on March 13, 2019

On a sub-Riemannian manifold of contact type a connection ∇^{ψ} with torsion is considered, called in the work a Ψ-connection. A Ψ-connection is a particular case of an N-connection. On a sub-Riemannian manifold, a Ψ-connection is defined up to an endomorphism $\psi : D \to D$ of a distribution D, this endomorphism is called in the work the structure endomorphism. The endomorphism ψ is uniquely defined by the following relations: $\psi\vec{\xi} = 0$, $\omega(\vec{x},\vec{y}) = g(\psi\vec{x},\vec{y})$, $\vec{x},\vec{y} \in \Gamma(D)$. If the distribution of a sub-Riemannian manifold is integrable, then the Ψ-connection is of the class of the quarter-symmetric connections. It is proved that the Ψ-connection is a metric connection if and only if the structure vector field of the sub-Riemannian structure is integrable. A formula expressing the

Ψ-connections in terms of the Levi-Civita connection of the sub-Riemannian manifold is obtained. The components of the curvature tensors and the Ricci-tensors of the Ψ-connection and of the Levi-Civita connection are computed. It is proved that if a sub-Riemannian manifold is an η-Einstein manifold, then it is also an η-Einstein manifold with respect to the Ψ-connection. The converse holds true only under the condition that the trace of the structure endomorphism Ψ is a constant not depending on a point of the manifold. The paper is completed by the theorem stating that a Sasaki manifold is an η-Einstein manifold if and only if M is an η-Einstein manifold with respect to the Ψ-connection.

Keywords: sub-Riemannian manifold, interior connection, Ψ-connection, η-Einstein manifold.

References

1. *Bukusheva, A. V.:* On the geometry of foliations on distributions with Finslerian metric. Izv. Penz. Pedagog. Univ. (Ser. fiz.-matem. i tekhn. nauki). 30, 33—38 (2012) (in Russian).

2. *Bukusheva, A. V.:* Nonlinear connections and internal semi-pulverization on a distribution with a generalized Lagrangian metric. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 46, 58—62 (2015) (in Russian).

3. *Bukusheva, A. V.:* Isometric transformations of a prolonged almost contact metric structures with the complete lift metric. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 47, 39—47 (2016) (in Russian).

4. *Bukusheva, A. V.:* Geometry of the Schouten-Einstein manifold. NovaInfo.Ru. **1**:92, 6—10 (2018) (in Russian).

5. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V.:* Geometry of almost contact hyperkähler manifolds. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 48, 32—41 (2017) (in Russian).

6. *Galaev, S. V.:* Smooth distributions with admissible hypercomplex pseudo-Hermitian structure. Vestnik Bashkirskogo universiteta. **21**:3, 551—555 (2016) (in Russian).

7. *Galaev, S. V.:* Admissible hypercomplex structures on distributions of Sasakian manifolds. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform. **16**:3, 263—272 (2016) (in Russian).

8. *Galaev, S. V.:* Generalized Wagner's curvature tensor of almost contact metric spaces. Chebyshevskii Sbornik. **17**:3(59), 53—63 (2016) (in Russian).

9. *Bukusheva, A.V., Galaev, S.V.:* Almost contact metric structures defined by connection over distribution. Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics. **4**(53):2, 13—22 (2011).

10. *Galaev, S.V.:* Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures, Lobachevskii Journal of Mathematics. **39**:1, 71—76 (2018).

11. *Okumura, M.:* Some remarks on space with a certain contact structure. Tohoku Math. J. 14, 135—145 (1962).

12. *Sparks, J.* Sasaki — Einstein manifolds. Surveys in differential geometry. Vol. XVI. Geometry of special holonomy and related topics. Int. Press, Somerville, MA, 265—324 (2011).