УДК 513.82

М.Б. Банару, Г.А. Банару

*(Смоленский гуманитарный университет,
Смоленский государственный педуниверситет)*

ПОЧТИ ЭРМИТОВЫ СТРУКТУРЫ НА 6-МЕРНЫХ ОРИЕНТИРУЕМЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЯХ АЛГЕБРЫ ОКТАВ

Рассматриваются 6-мерные ориентируемые подмногообразия алгебры Кэли, на которых 3-векторные произведения индуцируют почти эрмитову структуру. Получены структурные уравнения произвольной почти эрмитовой структуры и структуры класса $W_2 \oplus W_3$ на таких подмногообразиях алгебры октав.

1. Один из наиболее богатых и интересных источников примеров почти эрмитовых структур обусловлен существованием 3-векторных произведений на пространстве R^8, несущем структуру алгебры Кэли. Напомним, что почти эрмитовой (almost Hermitian, AH-) структурой на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $(J, g = \langle \cdot,\cdot \rangle)$, где J — почти комплексная структура, $g = \langle \cdot,\cdot \rangle$ — риманова метрика. При этом J и g должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Также напомним, что понятие *r*-векторного произведения в n-мерном евклидовом пространстве $\{E, \langle \cdot,\cdot \rangle\}$ введено Экманном [1]: r-векторным произведением называется непрерывное отображение $P: E^r \to E,$ обладающее свойствами:

$$\langle P(X_1,...,X_r), X_j \rangle = 0, \ \ \|P(X_1,..., X_r)\|^2 = \det(\langle X_j, X_k \rangle),$$

где $X_1,...,X_r \in E; k, j = 1,...,r.$

Экманн и Уайтхед [1; 2] средствами алгебраической топологии доказали, что r-векторные произведения существуют только в следующих случаях: n — четное, $r=1$; n — произвольное натуральное число; $r=n-1$; $n=7$, $r=2$; $n=8$, $r=3$.

С точки зрения геометрии наибольший интерес представляют r-векторные произведения, являющиеся r-линейными отображениями. Этот случай в предположении псевдоевклидовости метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ был изучен американскими математиками Р. Брауном и А. Греем чисто алгебраическими средствами [3]. Оказалось, что в этом случае результат Экманна и Уайтхеда сохраняет силу [3]. Более того, Браун и Грей указали явную конструкцию таких r-векторных произведений. Так, например, (n–1)-векторное произведение — это просто тензор типа $(n-1,1)$, полученный при помощи операции поднятия индекса у элемента объема евклидова пространства. Кроме того, Грей доказал [4], что r-векторное произведение в n-мерном евклидовом пространстве индуцирует $(m-n+r)$-векторное произведение в m-мерном его подпространстве. Отметим, что конструкция r-векторных произведений переносится и на случай отображения

$$P:(\aleph(M^{2n}))^r \to \aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на четномерном многообразии M^{2n}.

Что касается 3-векторного произведения, то его существование связано с существованием классической структуры алгебры Кэли в 8-мерном евклидовом пространстве. Браун и Грей указали [4] два неизоморфных 3-векторных произведения в алгебре октав:

$$P_1(X,Y,Z)=-X(\overline{Y}Z)+\langle X,Y\rangle Z+\langle Y,Z\rangle X-\langle Z,X\rangle Y,$$
$$P_2(X,Y,Z)=-(X\overline{Y})Z+\langle X,Y\rangle Z+\langle Y,Z\rangle X-\langle Z,X\rangle Y,$$

где $X,Y,Z\in\mathbf{O}$, $\mathbf{O}\equiv\mathbf{R}^8$ — алгебра октав, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{O}$, $X\to\overline{X}$ — оператор сопряжения в $\mathbf{O}$.

Оказалось, что любое другое 3-векторное произведение в алгебре октав изоморфно одному из приведенных. Существование же 2-векторного произведения в R^7, установленное Экманном и Уайтхедом, следует из вышеупомянутого результата Брауна и Грея и включения $R^7 \subset R^8 \equiv \mathbf{O}$.

С другой стороны, из названного результата Брауна и Грея следует, что каждое из канонических 3-векторных произведений на любом 6-мерном подмногообразии $M^6 \subset \mathbf{O}$ индуцирует 1-векторное произведение, то есть почти эрмитову структуру. Подобные почти эрмитовы структуры на 6-мерных подмногообразиях алгебры октав хорошо изучены лишь в случае так называемых структур Калаби. (Американский геометр Калаби указал несколько конкретных почти эрмитовых 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли [5].) Структуры Калаби индуцируются 2-векторными произведениями в R^7. Эти произведения, как мы уже упоминали, могут рассматриваться как индуцированные вложением $R^7 \subset R^8$. Таким образом, структуры Калаби есть частный случай почти эрмитовых структур, индуцированных на $M^6 \subset \mathbf{O}$. Самые значительные работы, посвященные структурам Калаби на 6-мерных подмногообразиях алгебры октав, на наш взгляд, принадлежат Грею [6; 7], Яно и Сумитомо [8].

Об общем случае ориентируемых 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав известно гораздо меньше. Из полученных ранее результатов, несомненно, следует отметить проведенную В.Ф. Кириченко полную классификацию келеровых [9] и приближенно келеровых [10] 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли, а также изученные им же $M^6 \subset \mathbf{O}$ с так называемой устойчивой почти эрмитовой структурой [11]. Кроме того, выделим и несколько относительно новых работ [12—14], посвященных в основном изучению келеровых и эрмитовых структур на $M^6 \subset \mathbf{O}$.

Известно, что группой автоморфизмов алгебры октав является группа G_2 в классификации Картана. Также известно, что уравнения вложения ее алгебры Ли $g_2 \subset \mathbf{O(8,R)}$ в каноническом базисе (т.е. в ортонормированном базисе, в котором таблица умножения алгебры октав имеет канонический вид) записываются следующим образом [10]:

$$
\begin{array}{lll}
1)\ \ \omega_3^{\breve{2}} + \omega_2^{\breve{3}} = \omega_1^7; & 2)\ \ \omega_{\breve{3}}^1 + \omega_{\breve{1}}^3 = \omega_{\breve{2}}^7; & 3)\ \ \omega_{\breve{2}}^1 + \omega_2^{\breve{1}} = \omega_3^7; \\
4)\ \ \omega_{\breve{3}}^{\breve{2}} + \omega_{\breve{3}}^2 = \omega_{\breve{1}}^7; & 5)\ \ \omega_{\breve{1}}^{\breve{3}} + \omega_{\breve{1}}^3 = \omega_{\breve{2}}^7; & 6)\ \ \omega_{\breve{2}}^{\breve{1}} + \omega_{\breve{1}}^2 = \omega_{\breve{3}}^7; \qquad (2) \\
7)\ \ \omega_{\breve{1}}^1 + \omega_{\breve{2}}^2 = \omega_{\breve{3}}^3 = 0; & 8)\ \ \omega_\eta^\xi + \omega_\xi^\eta = 0; & 9)\ \ \omega_\xi^0 = \omega_{10}^\xi = 0,
\end{array}
$$

где $\breve{a} = 7 - a$, $a = 1,2,3$. Здесь ω_η^ξ ($\eta, \xi = 0,...,7$) — инвариантные формы группы Ли G_2 . Будем называть уравнения (2) структурными уравнениями группы. Напомним, что точка $p \in M^6$ называется особой, если $e_0 \in T_p(M^6)$, и общей точкой — в противном случае [9; 10; 12; 13]. Общая точка называется специальной, если $T_p(M^6) \subset L(e_0)^\perp$, где $L(e_0)^\perp$ — ортогональное дополнение единицы алгебры октав, и простой — в противном случае. Естественно называть многообразие, состоящее из общих, особых либо специальных точек, общим, особым либо специальным многообразием соответственно. Как мы уже упоминали, случай специальных подмногообразий алгебры октав соответствует случаю многообразий Калаби и достаточно хорошо изучен.

2. Пусть $\{E, \langle .,. \rangle \}$ — общее подмногообразие, $p \in M^6$ — простая точка. Выберем репер $(m, e_1, ..., e_8)$ в $\mathbf{O}$ стандартным образом и перейдем к комплексному реперу (эта процедура описана подробно в работах [9; 10]) с векторами

$$
\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_{\breve{1}}); \ \ \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 \pm ie_3 \cos\varphi - ie_{\breve{2}} \sin\varphi);
$$

$$
\varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 \sin\varphi \pm e_2 \cos\varphi + ie_{\breve{3}}); \ \ \varepsilon^a = \tau(\varepsilon_a); \ e_\psi = \varepsilon_\psi ,
$$

где φ — угол, введенный в рассмотрение в работе [9]; τ — оператор комплексного сопряжения. Как и выше, первый и второй знак соответствуют случаю структуры первого и второго рода (отвечающие первому и второму 3-векторному произведению (1)). Векторы $\{\varepsilon_a, \varepsilon^a\}$ определяют собственный базис комплексификации оператора J_α и, следовательно, определяют A-репер пространства $T_p(M^6)$ [11].

В.Ф. Кириченко показал, что в новом репере структурные уравнения (2) группы G_2 имеют следующий вид:

$$1)\quad \omega^{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{abc}(\mp\omega_c^8 + i\omega_c^7);\ 2)\quad \omega_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{abc}(\pm\omega_8^c + i\omega_7^c);$$

$$3)\quad \omega_b^a + \omega_{\hat{a}}^{\hat{b}} = 0;\ 4)\quad \omega_\psi^a + \omega_{\hat{a}}^\psi = 0;\ 5)\quad \omega_\psi^{\hat{a}} + \omega_a^\psi = 0;$$

$$6)\quad \omega_1^a = \omega^{a1} + i\sqrt{2}\omega_8^a \operatorname{tg}\varphi; \qquad 7)\quad \omega_1^{\hat{a}} = \omega_{a1} - i\sqrt{2}\omega_8^{\hat{a}} \operatorname{tg}\varphi;$$

$$8)\quad \omega_1^1 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\omega_8^1 + \omega_8^{\hat{1}})\operatorname{tg}\varphi, \qquad 9)\quad \omega_8^7 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\omega_{\hat{1}}^7 - \omega_1^7)\operatorname{ctg}\varphi,$$

где $\omega^{ab} = \omega_{\hat{b}}^a$, $\omega_{ab} = \omega_b^{\hat{a}}$. В построенном репере M^6 задается системой Пфаффа $\omega^\psi = 0$. Дифференцируя эти соотношения внешним образом и используя лемму Картана, получим $\omega_k^\phi = T_{kj}^\phi \omega^j$, где $\{T_{kj}^\phi\}$ — система функций на пространстве расслоения комплексных реперов над M^6. Эти симметричные по нижним индексам функции служат компонентами тензора эйлеровой кривизны, или, по гораздо более употребительной терминологии Грея и Кириченко, конфигурационного тензора (см., например, [4; 9]), или второй основной формы погружения подмногообразия M^6 [15]. При этом

$$T_{ab}^\psi = \overline{T}_{\hat{a}\hat{b}}^\psi,\ T_{\hat{a}b}^\psi = \overline{T}_{a\hat{b}}^\psi.$$

Подытожив вышесказанное, получим структурные уравнения почти эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав:

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{ah[b} D_h{}^{c]} \omega_b \wedge \omega_c; \quad (3)$$

$$d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ah[b} D^h{}_{c]} \omega^b \wedge \omega^c;$$

$$d\omega^a_b = \omega^a_c \wedge \omega^c_b - \left(\frac{1}{2} \delta^{ah}_{bg} D_{h[k} D^g{}_{j]} + \sum T_{\hat{a}[k} T_{j]b} \right) \omega^k \wedge \omega^j,$$

где

$$D_{cj} = \mp T^8_{cj} + iT^7_{cj}; \quad D_{\hat{c}j} = \mp T^8_{\hat{c}j} - iT^7_{\hat{c}j};$$

$$D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}}; \quad D_h{}^c = D_{h\hat{c}}; \quad D^h{}_c = D_{\hat{h}c};$$

$$\delta^{ah}_{bg} = \delta^a_b \delta^h_g - \delta^a_g \delta^h_b;$$

$\varepsilon_{abc} = \varepsilon^{123}_{abc}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon^{abc}_{123}$ — компоненты тензора Кронекера третьего порядка [16]. При этом $\overline{\omega}^a = \omega_a$, $\overline{\omega}^a_b = -\omega^b_a$. В частности, $(3)_1$ комплексно сопряжено $(3)_2$, а $(3)_3$ самосопряжено. Здесь и далее

$$a, b, c, d, e, f, g, h = 1,2,3; \ \hat{a} = a + 3; \quad \breve{a} = 7 - a; \quad \psi, \phi = 7,8;$$
$$i, j, k, l, m, n, p, r, s = 1,2,3,4,5,6; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 2,3.$$

Воспользовавшись условием принадлежности произвольной почти АН-структуры классу $W_2 \oplus W_3$ [17] (в терминологии Грея и Хервеллы [18]) получаем, что справедлива нижеследующая теорема.

Теорема. *Структурные уравнения почти эрмитовой структуры класса* $W_2 \oplus W_3$ *на 6-мерном ориентируемом подмногообразии алгебры октав имеют вид (3), где* $\mathrm{tr}(D_{h\hat{c}}) = 0$.

Список литературы

1. *Eckmann B.* Stetige losungen linearer gleichungsysteme // Com. Math. Helv. 1942—1943. V. 15. P. 318—339.

2. *Whitehead G.* Note on cross-sections in Stiefel manifolds // Com. Math. Helv. 1962. V. 34. P. 239—240.

3. *Brown R., Gray A.* Vector cross products // Com. Math. Helv. 1967. V. 42. P. 222—236.

4. *Gray A.* Vector cross products on manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 141. P. 465—504.

5. *Calabi E.* Construction and properties of some six-dimensional almost complex manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1958. V. 87. P. 407—438.

6. *Gray A.* Some examples of almost Hermitian manifolds // Illinois Journal Math. 1966.V. 10. № 2. P. 353—366.

7. *Gray. A.* Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products // Tohoku Math. Journal. 1969. V. 21. P. 614—620.

8. *Yano K., Sumitomo T.* Differential geometry of hypersurfaces in a Cayley space // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1962—1964. Sect. A 66. P. 216—231.

9. *Кириченко В.Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Известия вузов. Сер. Матем. 1980. №8. С. 32—38.

10. *Кириченко В.Ф.* Почти келеровы структуры, индуцированные 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Вестник МГУ. Сер. матем. и механ. 1973. №3. С.70—75.

11. *Кириченко В.Ф.* Устойчивость почти эрмитовых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Украинский геометрический сборник. Харьков, 1982. Т. 25. С. 60—68.

12. *Banaru M.* Six theorems on six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Известия Академии наук Республики Молдова. 2000. Т. 34. №3. С. 3—10.

13. *Банару М.Б.* Две теоремы о косимплектических гиперповерхностях 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Известия вузов. Матем. 2002. №1. С. 9—12.

14. *Банару М.Б.* О косимплектических гиперповерхностях 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли // Известия вузов. Матем. 2003. №7. С. 59—63.

15. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.

16. *Лихнерович А.* Теория связностей в целом и группы голономий. М., 1960.

17. *Банару М.Б.* О восьми классах Грея — Хервеллы почти эрмитовых структур, реализуемых на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Новейшие проблемы теории поля. Казань, 2003. С. 44—50.

18. *Gray A., Hervella L.M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura Appl. 1980. V. 123. №4. P. 35—58.

M. Banaru, G. Banaru

ALMOST HERMITIAN STRUCTURES ON 6-DIMENSIONAL ORIENTED SUBMANIFOLDS OF THE OCTAVE ALGEBRA

Six-dimensional submanifolds of Cayley algebra equipped by almost Hermitian structures induced by means of three-fold vector cross products are considered. The Cartan structural equations of an arbitrary almost Hermitian structure and of $W_2 \oplus W_3$-structure on submanifolds are obtained.

УДК 514.75

О.О. Белова

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

РЕДУКЦИИ СВЯЗНОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВА ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРИ НОРМАЛИЗАЦИИ

В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрено пространство П центрированных плоскостей L^*_m размерности m. С ним ассоциировано главное расслоение, в котором задана групповая связность, неоднозначно индуцируемая нормализацией пространства П. Исследованы полунормализованные пространства 1-го рода Π^1, 2-го рода Π^2 и нормализованное пространство $\Pi^{1,2}$. Установлена динамика изменений соот-