1)Обе ассоциированные квадрики Q_1 и Q_2 являются конусами с вершиной A_0:

2)Точка A_0 является фокальной точкой второго порядка.

Квадрика Ли поверхности (A_0) конгруэнции $\mathcal{N}$ пересекается с квадрикой Q по асимптотическим касательным A_0A_i и конике:

$$x^1x^2-x^0x^3=0\ ,\quad h_k x^k+mx^3=0\,. \tag{7}$$

Таким образом,с конгруэнцией $\mathcal{N}$ ассоциируется конгруэнция коник,лежащих на квадрике Q .

О п р е д е л е н и е 3.Конгруэнцией $\mathcal{N}_0$ называется конгруэнция $\mathcal{N}$,у которой линии h, a_1, a_2 совпадают,а точки A_1 и A_2 не сопряжены полярно относительно обеих ассоциированных квадрик Q_1 и Q_2 .

В силу этого определения конгруэнции $\mathcal{N}_0$ выделяются из конгруэнций $\mathcal{N}$ соотношениями:

$$a=0\,,\ s_1=0\,,\ s_2=0, \tag{8}$$

$$h_1h_2\neq 0\,, \tag{9}$$

где относительные инварианты a, s_1, s_2 определяются формулами (3) работы [3].

С учетом (9) осуществим фиксацию оставшихся двух вторичных групповых параметров,положив: $h_1=1$,$h_2=1$. Пфаффова система уравнений конгруэнции $\mathcal{N}_0$ имеет вид:

$$\begin{cases} \omega_0^3=0\,,\ \omega_3^0=0\,,\ 2\,\omega_i^{\hat{i}}=-\omega^i-\omega^{\hat{i}},\ \omega_i^3=\omega^{\hat{i}}, \\ \omega_3^i=b_k^i\omega^k,\ \omega_i^0=(b_k^{\hat{i}}+\lambda_{ik})\,\omega^k, \\ 2\omega_0^0=(H_{11}+H_{21}-\frac{1}{2})\,\omega^1+(H_{12}+H_{22}-\frac{1}{2})\,\omega^2, \\ 2\omega_3^3=(\frac{3}{2}-H_{11}-H_{21})\,\omega^1+(\frac{3}{2}-H_{12}-H_{22})\,\omega^2, \\ 2\,\omega_i^i=(H_{\hat{i}i}-H_{ii}-\frac{1}{2})\omega^i+(H_{\hat{i}\hat{i}}-H_{i\hat{i}}-\frac{1}{2})\,\omega^{\hat{i}}, \end{cases} \tag{10}$$

где величины H_{ik} находятся из дифференциальных уравнений для компонент геометрического объекта h_i .Из (10) следуют конечные соотношения:

$$\begin{cases} b_1^1\lambda_{12}-b_2^2\lambda_{21}+b_1^2\lambda_{22}-b_2^1\lambda_{11}=0, \\ H_{i\hat{i}}=\lambda_{ii}+\frac{1}{2}(H_{11}+H_{22})\,,\ \lambda_{11}-\lambda_{22}+2\,(\lambda_{12}-\lambda_{21})=0\,. \end{cases} \tag{11}$$

Анализируя систему (10),(11),убеждаемся,что конгруэнции $\mathcal{N}_0$ определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Для конгруэнций $\mathcal{N}_0$ справедливы конечные соотношения (2) работы [3] и соотношения:

$$-\lambda c+(u_i-a)^2+2v_{\hat{i}}q_{\hat{i}}+(s_i+t_i)(t_{\hat{i}}-s_{\hat{i}})-(v_i+w_i)(r_{\hat{i}}+q_{\hat{i}})-p_i\ell_i=0,$$

$$\lambda(r_{\hat{i}}+q_{\hat{i}})+2v_{\hat{i}}\,(u_i-a)+\ell_i\,(s_{\hat{i}}-t_{\hat{i}})+(v_i+w_i)\,(s_i+t_i)=0\,.$$

Следовательно,фокальная точка A_0 квадрики $Q\in\mathcal{N}_0$ -шестикратная. Таким образом, $\mathcal{N}_0\in\mathcal{K}_6$. Можно показать,что конгруэнция $\mathcal{N}_0$ не является конгруэнцией $\mathcal{K}_7$.

Уравнение квадрики Ли Q_0 фокальной поверхности (A_0) конгруэнции $\mathcal{N}_0$ записывается в виде

$$\Phi_0\equiv 4\,(x^1x^2-x^0x^3)+2x^1x^2+2x^2x^3+(2\lambda_{12}+H_{12})\,(x^3)^2=0.$$

Плоскость коники (7) проходит через точку A_0 и точку $E_0^*=A_1-A_2$ - четвертую гармоническую единичной точке $E_0=A_1+A_2$ относительно A_1 и A_2.

Библиографический список

1.Л а п т е в Г.Ф. Распределения касательных элементов// Тр. геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1971.Т.3.С.29-48.

2.М а л а х о в с к а я С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с кратной фокальной поверхностью//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1981.Вып.12. С.44-47.

3.Ш м е л е в а С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с четырехкратной фокальной поверхностью//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1986.Вып.17.С.106-109.

УДК 514.75

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КОНГРУЭНЦИИ КОНИК В A_3

Е.А.Щ е р б а к
(Калининградский ун-т)

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются конгруэнции коник F ,лежащих на инвариантной цилиндрической поверхности Φ .Назовем такие конгруэнции цилиндрическими конгруэнциями коник.

Исследования проводятся в частично-канонизированном репере

$R=\{A,\bar{e}_\alpha\}$ ($\alpha=1,2,3$), начало A которого совмещено с центром коники F, концы E_i векторов $\bar{e}_i$ ($i=1,2$) расположены на конике F так, что векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ сопряжены относительно F, причем вектор $\bar{e}_1$ параллелен прямой, соединяющей центр коники F с характеристической точкой плоскости коники F. Вектор $\bar{e}_3$ параллелен образующей цилиндрической поверхности Φ.

Уравнения коники F и цилиндрической поверхности Φ в выбранном репере имеют соответственно вид:

$$F:\quad (x^1)^2+(x^2)^2=1,\quad x^3=0\,; \tag{I}$$

$$\Phi:\quad (x^1)^2+(x^2)^2=1\,. \tag{2}$$

Из условия инвариантности цилиндрической поверхности Φ имеем:

$$\omega^1=\omega^2=\omega_1^1=\omega_2^2=\omega_3^1=\omega_3^2=0,\quad \omega_2^1+\omega_1^2=0\,. \tag{3}$$

Система уравнений Пфаффа цилиндрической конгруэнции коник состоит из уравнений (3) и следующих уравнений:

$$\omega_1^2=\Gamma_1^{2i}\Omega_i\,,\quad \omega^3=\Gamma^{31}\Omega_1\quad (\Gamma^{31}\neq 0)\,, \tag{4}$$

где главные формы $\Omega_i=\omega_i^3$ приняты за независимые формы конгруэнции K.

Анализируя системы уравнений (3) и (4), убеждаемся, что цилиндрические конгруэнции коник существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

О п р е д е л е н и е I. Обозначим через $F_{a,b}$ (a,b - положительные фиксированные числа) конику, заданную уравнениями:

$$a(x^1)^2+b(x^2)^2=1,\quad x^3=0\,, \tag{5}$$

т.е. конику, принадлежащую плоскости $\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$, имеющую центр в точке A и относительно которой векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены.

Интерес представляет случай, когда $a\neq b$. Координаты фокальных точек коники $F_{a,b}$ конгруэнции $(F_{a,b})$ определяются из уравнений (5) и уравнения $x^1x^2(b-a)(\Gamma_1^{21}x^2-\Gamma_1^{22}x^1-\Gamma_1^{22}\Gamma^{31})=0$ или, т.к. $a\neq b$,

$$x^1x^2(\Gamma_1^{21}x^2-\Gamma_1^{22}x^1-\Gamma_1^{22}\Gamma^{31})=0\,. \tag{6}$$

Т е о р е м а 1. Точки пересечения коники $F_{a,b}$ с ее диаметрами, параллельными векторам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, являются фокальными точками коники $F_{a,b}$ в конгруэнции $(F_{a,b})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точки $C_{1,2}$; $C_{3,4}$ пересечения коники $F_{a,b}$ с ее диаметрами, параллельными векторам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, имеют координаты $C_{1,2}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{a}},0,0\right)$ и $C_{3,4}\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{b}},0\right)$.

Подставляя координаты полученных точек в уравнение (6), убеждаемся в справедливости теоремы.

Т е о р е м а 2. Фокальные точки коники $F_{a,b}$ конгруэнции $(F_{a,b})$, отличные от точек $C_{1,2}$ и $C_{3,4}$, тогда и только тогда принадлежат прямой, проходящей через центр коники $F_{a,b}$, когда индикатриса вектора $\bar{e}_1$ вырождается в линию.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фокальные точки коники $F_{a,b}$ конгруэнции $(F_{a,b})$, отличные от точек $C_{1,2}$ и $C_{3,4}$, расположены на прямой ℓ, заданной уравнениями:

$$\Gamma_1^{22}x^1-\Gamma_1^{21}x^2+\Gamma_1^{22}\Gamma^{31}=0,\quad x^3=0\,. \tag{7}$$

Так как $\Gamma^{31}\neq 0$, то прямая ℓ тогда и только тогда проходит через центр коники $F_{a,b}$, когда

$$\Gamma_1^{22}=0\,. \tag{8}$$

Рассмотрим индикатрису вектора $\bar{e}_1$. Имеем

$$d\bar{e}_1=\Omega_1(\Gamma_1^{21}\bar{e}_2+\bar{e}_3)+\Omega_2\Gamma_1^{22}\bar{e}_2\,. \tag{9}$$

Из формулы (8) следует, что индикатриса вектора $\bar{e}_1$ тогда и только тогда вырождается в линию, когда

$$\Gamma_1^{22}=0\,. \tag{I0}$$

Сравнивая соотношения (8) и (I0), убеждаемся в справедливости теоремы 2.

О п р е д е л е н и е 2. Обозначим через $F_{a,b}^c$ (a,b,c - фиксированные числа) конику, заданную уравнениями:

$$a(x^1)^2+b(x^2)^2+2cx^1x^2=1,\quad x^3=0\,, \tag{II}$$

т.е. конику, принадлежащую плоскости $\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ и имеющую центр в точке A.

Интерес представляет только случай, когда условия $a=b$ и $c=0$ не выполняются одновременно.

Координаты фокальных точек коники $F_{a,b}^c$ конгруэнции $(F_{a,b}^c)$ определяются из уравнений (II) и уравнения

$$((b-a)x^1x^2+c((x^1)^2-(x^2)^2)(\Gamma_1^{21}x^2-\Gamma_1^{22}x^1-\Gamma_1^{22}\Gamma^{31})=0\,. \tag{I2}$$

Т е о р е м а 3. Точки пересечения коники $F_{a,b}^c$ конгруэнции $(F_{a,b}^c)$ с прямыми AE_1 и AE_2 тогда и только тогда одновременно являются ее фокальными точками, когда коника $F_{a,b}^c$ является коникой $F_{a,b}$, т.е. когда векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены относительно этой коники.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точки пересечения коники $F^c_{a,b}$ с прямыми AE_1 и AE_2 имеют вид:

$$M_{1,2}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{a}}, 0, 0\right), \quad M_{3,4}\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{b}}, 0\right). \qquad (13)$$

Так как точки (13) одновременно являются фокальными точками коники $F^c_{a,b}$ конгруэнции $(F'^c_{a,b})$, то их координаты должны удовлетворять уравнению (12), а это возможно только в случае, когда $c=0$, т.е. когда коника $F^c_{a,b}$ является коникой $F_{a,b}$. Обратное утверждение теоремы легко проверить, подставив в уравнение (12) $c=0$.

Т е о р е м а 4. Точки пересечения коники $F^c_{a,b}$ с прямыми $x^1=\pm x^2$ тогда и только тогда являются ее фокальными точками, когда коника $F^c_{a,b}$ есть коника $F^c_{a,a}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точки пересечения коники $F^c_{a,b}$ с прямыми $x^1=x^2$ и $x^1=-x^2$ имеют соответственно вид:

$$N_{1,2}(\pm B_1, \pm B_1, 0); \quad N_{3,4}(\pm B_2, \pm B_2, 0), \qquad (14)$$

где

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{a+b+2c}}, \quad B_2 = \frac{1}{\sqrt{a+b-2c}}.$$

Подставляя координаты точек (14) в уравнение (12), убеждаемся, что они будут удовлетворять этому уравнению только в случае, когда $a=b$, т.е. когда коника $F^c_{a,b}$ является коникой $F^c_{a,a}$. Обратное утверждение теоремы следует из того, что при $a=b$ уравнение (12) приводится к виду: $((x^1)^2-(x^2)^2)(\Gamma^{21}_1 x^2-\Gamma^{22}_1 x^1-\Gamma^{22}_1\Gamma^{31})=0$, следовательно, точки пересечения прямых $x^1=\pm x^2$ с коникой $F^c_{a,a}$ являются ее фокальными точками.

Т е о р е м а 5. Каждая из коник $F_{a,b}$ и $F^c_{a,b}$ имеет по две фокальные точки, инцидентные прямой ℓ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прямая ℓ задается уравнениями (7), учитывая их в уравнениях (6) и (12) для определения координат фокальных точек коник $F_{a,b}$ и $F^c_{a,b}$, убеждаемся в справедливости теоремы.

Т е о р е м а 6. Прямая ℓ проходит через характеристическую точку плоскости коники F.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Характеристическая точка плоскости коники F имеет координаты $(-\Gamma^{31}, 0, 0)$. Подставляя эти координаты в уравнения (7), задающие прямую ℓ, убеждаемся в справедливости теоремы.

С Е М И Н А Р
по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском госуниверситете

В предыдущих выпусках сборника освещена работа семинара по 23 декабря 1987 года. Ниже приводится перечень докладов, обсужденных на семинаре в 1988 году.

10.02.88. В.С.М а л а х о в с к и й. Обзор по дифференциальной геометрии многообразий фигур.

17.02.88. Б.А.А н д р е е в. Отображения многообразий фигур в механике сплошных сред.

24.02.88. А.В.М а х о р к и н. Метод нормальных форм в теории систем Пфаффа.

2.03.88. В.В.М а х о р к и н. Инфинитезимальные фигуры.

9.03.88. Ю.И.П о п о в. Дифференциально-геометрические структуры многообразия.

16.03.88. Е.В.С к р ы д л о в а. О вырожденных конгруэнциях, порожденных парой коник специального взаимного расположения.

23.03.88. С.В.Ш м е л е в а. Конгруэнции квадрик в трехмерном проективном пространстве с фокальным автополярным тетраэдром.

30.03.88. В.Н.Х у д е н к о. О связи связности в расслоении, ассоциированном с многообразием обобщенных пространственных элементов, с пространством аффинной связности.

6.04.88. Е.А.Щ е р б а к. О конгруэнциях пар фигур, порожденных коникой и плоскостью.

13.04.88. С.Ю.В о л к о в а. Об одном классе распределений проективного пространства.

20.04.88. Л.М.К р е с с (г.Казань). Пучки билинейных форм и аффинные связности в биаксиальных и биаффинных пространствах.

27.04.88. Э.Ш.З а р и п о в (Тадж.ССР). Геометрия однородных пространств, порожденных группами унитарных и неевклидовых движений и их автоморфизмами.