$$= ({}^aX({}^aY\,{}^af) - ({}^aY({}^aX\,{}^af))_{(0)} =$$
$$= ([{}^aX, {}^aY]\,{}^af)_{(0)} = [{}^aX, {}^aY]^{(0)}\,{}^af_{(0)},$$

если $a \neq b$, то получаем также верное равенство.

Список литературы

Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.

M. Glebova

Continuation of vector fields from smooth manifold in their direct product

Construction of continuations of vector fields from smooth manifolds in direct product of these smooth manifold is described.

УДК 514.76

А. И. Егоров

Пензенский государственный педагогический университет им. В. Г. Белинского

О некоторых свойствах максимально подвижного пространства *T* общей теории относительности

Рассматривается пространство T общей теории относительности, допускающее полную группу движений максимально порядка G_6. В этом пространстве находятся ковариантно постоянные тензорные поля ξ^i, a_{ij}, b_{ij}.

Ключевые слова: группа движений, ковариантно постоянные тензорные поля.

В работе рассматриваются свойства максимально подвижного пространства T общей теории относительности. Метрика такого пространства имеет вид

$$ds^2 = 2dx^1dx^2 + \sin^2 x^1 dx^{3^2} + sh^2 x^1 dx^{4^2} \qquad (1)$$

в некоторой системе координат. Это пространство приведено впервые профессором А. З. Петровым [1].

1. Непосредственным подсчетом нетрудно убедиться, что

$$R_{ij} = 0, \left(R_{ij} = \chi(x) g_{ij}, \chi(x) = 0\right),$$

$$R_{ijkl,\delta} = 0, \Gamma^i_{jk} = A^i B_{jk} + C^i D_{jk} + K^i M_{jk},$$

$$R_{ijkl} = \varepsilon_1 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \varepsilon_2 v_{ij} v_{kl},$$

где $A^i = \delta^i_2, C^k = \delta^k_3, K^j = \delta^j_4$, (i, j, k = 1, 2, 3, 4),

$$\varepsilon_1 = \pm 1, \quad \varepsilon_2 = \pm 1, \quad \varepsilon_{13} = \sin x^1, \quad v_{14} = shx^1,$$

$$B_{33} = -\frac{1}{2}\sin 2x^1, B_{44} = -\frac{1}{2} sh2x^1, D_{13} = ctgx^1, M_{14} = cthx^1,$$

остальные $A^i, C^i, D^j, B_{jk}, D_{jk}, M_{jk}, \varepsilon_{ij}, v_{kl}$ равны нулю.

Следовательно, мы приходим к следующему выводу:

Теорема 1. *Пространство (1) общей теории относительности является эйнштейновым и симметрическим пространством* $V_4(x)$.

2. Выясним, существуют ли в пространстве (1) векторные поля $\vec{\xi} = \{\xi^i(x)\}$, которые являются ковариантно-постоянными относительно символов Кристоффеля второго рода. Таким образом, наша задача найти такие векторные поля $\vec{\xi} = \{\xi^i(x^1, x^2, x^3, x^4)\}$, чтобы ковариантная производная $\xi^i_{,j}$ равнялась нулю:

$$\xi^i_{,j} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{\sigma j}\xi^\sigma = 0.$$

При i, j =1, 2, 3, 4 получим систему из 16 дифференциальных уравнений в частных производных. Нетривиальные уравнения системы следующие:

$$\frac{\partial a^2}{\partial x^3} - \frac{1}{2}\sin 2x^1 \cdot a^3 = 0,$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial x^4} - \frac{1}{2}sh2x^1 \cdot a^4 = 0,\ \frac{\partial a^3}{\partial x^1} + ctgx^1 \cdot a^3 = 0,$$

$$\frac{\partial a^3}{\partial x^3} + ctgx^1 \cdot a^1 = 0,$$

$$\frac{\partial a^4}{\partial x^1} + cthx^1 \cdot a^4 = 0,\ \frac{\partial a^4}{\partial x^4} + cthx^1 \cdot a^1 = 0.$$

Общее решение этой системы имеет вид

$\left\{\xi^1 = 0, \xi^2 = \alpha, \xi^3 = 0, \xi^4 = 0\right\}$, где $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

Получим искомое изотропное векторное поле $\vec{\xi}$:

$$\vec{\xi} = \left\{0, \alpha, 0, 0\right\}. \tag{2}$$

Теорема 2. *В рассматриваемом пространстве T существуют одно изотропное независимое векторное поле $\vec{\xi}$, ковариантная производная от которого равна нулю. Общий вид такого поля (2).*

3. Выясним, существуют ли в пространстве Эйнштейна (1) два раза ковариантные симметрические тензорные поля $a_{ij}\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)$, которые являются ковариантно-постоянными относительно символов Кристоффеля второго рода. Итак, наша задача найти такие тензорные поля $a_{ij}\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)$, чтобы ковариантная производная $a_{ij,k} = 0$:

$$a_{ij,k} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^{\sigma}_{ik} a_{\sigma j} - \Gamma^{\sigma}_{jk} a_{i\sigma} = 0 \ \left(a_{jk} = a_{kj}\right).$$

При $i, j = 1, 2, 3, 4$ получим систему из 40 дифференциальных уравнений в частных производных. Подставляя в эту систему найденные ранее значения символов Кристоффеля, получим:

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^3}-2a_{13}ctgx^1=0,\quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^4}-2a_{14}cthx^1=0,\quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3}-a_{23}ctgx^1=0,$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^4}-a_{24}cthx^1=0,\quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^1}-a_{13}ctgx^1=0,$$

$$\frac{\partial a_{13}}{\partial x^3}-a_{33}ctgx^1+\frac{1}{2}a_{12}\sin 2x^1=0,\quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^4}-a_{34}cthx^1=0,$$

$$\frac{\partial a_{14}}{\partial x^4}-a_{14}cthx^1=0,\quad \frac{\partial a_{14}}{\partial x^3}-a_{34}ctgx^1=0,$$

$$\frac{\partial a_{14}}{\partial x^4}-a_{44}ctgx^1+\frac{1}{2}a_{12}sh2x^1=0,\quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^1}-a_{23}ctgx^1=0,$$

$$\frac{\partial a_{23}}{\partial x^3}+\frac{1}{2}a_{22}\sin 2x^1=0,\quad \frac{\partial a_{24}}{\partial x^1}-a_{24}cthx^1=0,$$

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial x^3}+a_{23}\sin 2x^1=0,\quad \frac{\partial a_{24}}{\partial x^4}+\frac{1}{2}a_{22}sh2x^1=0,$$

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial x^1}-2a_{33}ctgx^1=0,\quad \frac{\partial a_{34}}{\partial x^1}-a_{34}\left(ctgx^1+cthx^1\right)=0,$$

$$\frac{\partial a_{34}}{\partial x^3}+\frac{1}{2}a_{24}\sin 2x^1=0,\quad \frac{\partial a_{34}}{\partial x^4}+\frac{1}{2}a_{23}sh2x^1=0,$$

$$\frac{\partial a_{44}}{\partial x^1}-2a_{44}cthx^1=0,\quad \frac{\partial a_{44}}{\partial x^4}+a_{24}sh2x^1=0.$$

Общее решения этой системы можно записать в виде матрицы

$$\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0\\ \alpha_{12} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_{12}\sin^2 x^1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{12}sh^2x^1\end{pmatrix};\ \alpha_{11},\alpha_{12}\in \boldsymbol{R}. \quad (3)$$

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 3. *В пространстве Эйнштейна (1) существует целое семейство тензорных полей* $a_{ij}\left(a_{ij}=a_{ji}\right)$, *ковариантная производная от которых равна нулю.*

Замечание. С помощью преобразования системы координат по формулам

$$x^{1}=x^{1^{1}},x^{2}=-\frac{\alpha_{11}}{2\alpha_{12}}x^{1^{1}}+\frac{1}{\alpha_{12}}x^{2^{1}},x^{3}=\frac{1}{\sqrt{\alpha_{12}}}x^{3^{1}},x^{4}=\frac{1}{\sqrt{\alpha_{12}}}x^{4^{1}},$$

где $\alpha_{12}>0$, $\det\left\|\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i^{1}}}\right\|\neq 0$, тензорное поле a_{ij} (3) перейдет в тензорное поле $g_{ij}(x)$ (штрихи у $g_{ij}(x)$ опускаем).

Следовательно, постоянную α_{11} всегда можно обратить в нуль, а постоянную $\alpha_{12}>0$ всегда можно обратить в единицу в формулах (7) за счет выбора новой системы координат.

4. Выясним теперь, существует ли в пространстве Эйнштейна два раза ковариантные тензорные поля $b_{ij}\left(x^{1},x^{2},x^{3},x^{4}\right)$, являющиеся ковариантно-постоянными относительно символов Кристоффеля второго рода.

Итак, нужно найти тензорные поля $b_{ij}\left(x^{1},x^{2},x^{3},x^{4}\right)$, чтобы ковариантная производная от них равнялась нулю

$$b_{ij,k}=\frac{\partial b_{ij}}{\partial x^{k}}-\Gamma_{ik}^{\sigma}b_{\sigma j}-\Gamma_{jk}^{\sigma}b_{i\sigma}=0\ \ (b_{ij}\neq b_{ji}).$$

При $i,j=1,2,3,4$ получим систему из 64 дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial x^{3}}-b_{31}ctgx^{1}-b_{13}ctgx^{1}=0,\ \frac{\partial b_{11}}{\partial x^{4}}-b_{41}cthx^{1}-b_{14}cthx^{1}=0,$$

$$\frac{\partial b_{12}}{\partial x^{3}}-b_{32}ctgx^{1}=0,\ \ \frac{\partial b_{12}}{\partial x^{4}}-b_{42}cthx^{1}=0,\ \ \frac{\partial b_{13}}{\partial x^{1}}-b_{13}ctgx^{1}=0,$$

$$\frac{\partial b_{13}}{\partial x^{3}}-b_{33}ctgx^{1}+\frac{1}{2}b_{12}\sin 2x^{1}=0,\ \ \frac{\partial b_{13}}{\partial x^{4}}-b_{43}cthx^{1}=0,$$

$$\frac{\partial b_{14}}{\partial x^1}-b_{14}cthx^1=0,\ \frac{\partial b_{14}}{\partial x^3}-b_{34}ctgx^1=0,$$
$$\frac{\partial b_{14}}{\partial x^4}-b_{44}cthx^1+\frac{1}{2}b_{12}sh2x^1=0,\ \frac{\partial b_{21}}{\partial x^3}-b_{23}ctgx^1=0,$$
$$\frac{\partial b_{21}}{\partial x^4}-b_{24}cthx^1=0,\ \frac{\partial b_{23}}{\partial x^1}-b_{23}ctgx^1=0,$$
$$\frac{\partial b_{23}}{\partial x^3}+\frac{1}{2}b_{22}\sin 2x^1=0,\ \frac{\partial b_{24}}{\partial x^1}-b_{24}cthx^1=0,$$
$$\frac{\partial b_{24}}{\partial x^4}+\frac{1}{2}b_{22}sh2x^1=0,\ \frac{\partial b_{31}}{\partial x^1}-b_{31}ctgx^1=0,$$
$$\frac{\partial b_{31}}{\partial x^3}-b_{33}ctgx^1+\frac{1}{2}b_{21}\sin 2x^1=0,\ \frac{\partial b_{31}}{\partial x^4}-b_{34}ctgx^1=0,$$
$$\frac{\partial b_{32}}{\partial x^1}-b_{32}cthx^1=0,\ \frac{\partial b_{32}}{\partial x^3}+\frac{1}{2}b_{22}sh2x^1=0,$$
$$\frac{\partial b_{33}}{\partial x^1}-2b_{33}ctgx^1=0,\ \frac{\partial b_{33}}{\partial x^3}+\frac{1}{2}b_{23}\sin 2x^1+\frac{1}{2}b_{32}\sin 2x^1=0,$$
$$\frac{\partial b_{34}}{\partial x^1}-b_{34}\left(ctgx^1+cthx^1\right)=0,\ \frac{\partial b_{34}}{\partial x^3}+\frac{1}{2}b_{24}\sin 2x^1=0,$$
$$\frac{\partial b_{34}}{\partial x^4}+\frac{1}{2}b_{32}sh2x^1=0,\ \frac{\partial b_{41}}{\partial x^1}-b_{41}cthx^1=0,$$
$$\frac{\partial b_{41}}{\partial x^3}-b_{43}ctgx^1=0,\ \frac{\partial b_{41}}{\partial x^4}-b_{44}ctgx^1+\frac{1}{2}b_{21}sh2x^1=0,$$
$$\frac{\partial b_{42}}{\partial x^1}-b_{42}cthx^1=0,\ \frac{\partial b_{44}}{\partial x^1}-2b_{44}cthx^1=0,$$
$$\frac{\partial b_{42}}{\partial x^4}+\frac{1}{2}b_{22}sh2x^1=0,\ \frac{\partial b_{43}}{\partial x^3}-b_{43}\left(ctgx^1+cthx^1\right)=0,$$
$$\frac{\partial b_{43}}{\partial x^3}+\frac{1}{2}b_{42}\sin 2x^1=0,\ \frac{\partial b_{43}}{\partial x^4}+\frac{1}{2}b_{23}sh2x^1=0,$$
$$\frac{\partial b_{44}}{\partial x^4}+\frac{1}{2}b_{24}sh2x^1+\frac{1}{2}b_{42}sh2x^1=0.$$

Общее решение этой системы можно записать в виде матрицы

$$\left(b_{ij}\right)=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & c_2\sin x^1 & c_1 shx^1 \\ \alpha_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -c_2\sin x^1 & 0 & \alpha_{12}\sin^2 x^1 & 0 \\ -c_1 shx^1 & 0 & 0 & \alpha_{12} sh^2 x^1 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

где $\alpha_{11},\alpha_{12},c_1,c_2$ — производные постоянные.

Итак, мы приходим к следующему выводу:

Теорема 4. *В пространстве Эйнштейна (1) существует семейство тензорных полей*

$$b_{jk},\ (b_{jk}\neq b_{kj}\ \text{в общем случае}),$$

таких, что

$$b_{ij,k}=0,\ (j,k,i=1,2,3,4).$$

Замечание. Составляющие тензорного поля b_{jk} (4) можно принять за составляющие метрического тензорного поля нового пространства общей теории относительности с кручением $\Omega\neq 0$:

$$\Omega_{jk}=\frac{1}{2}(b_{jk}-b_{kj})\neq 0,\ \left(\Omega_{jk}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & c_2\sin x^1 & c_1 shx^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2\sin x^1 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 shx^1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пространства $\widetilde{T}$ с кручением допускают полную группу движений G_r максимального порядка $r=6$. Очевидно, что

$$g_{jk}=\frac{1}{2}\left(b_{jk}+b_{kj}\right),\qquad b_{jk}=g_{jk}+\Omega_{jk}.$$

Составляющие $\{g_{jk}(x)\}$ образуют сопутствующее метрическое тензорное поле в пространстве $\tilde{T}$.

Рассматриваемое эйнштейново пространство T (1) можно обобщить на n-мерный случай ($n>4$) двумя способами.

1. Первый способ:

$$ds^2 = 2dx^1dx^2 + \sin^2 x^1 dx^{3^2} + sh^2 x^1 dx^{4^2} + e_2 dx^{5^2} + \ldots + e_n dx^{n^2}\ . \quad (5)$$

2. Второй способ:

$$\begin{aligned} ds^2 &= 2dx^1dx^2 + \sin^2 x^1 \left[e_3 dx^{3^2} + \ldots + e_k dx^{k^2} \right] + \\ &+ sh^2 x^1 \left[e_{k+1} dx^{k+1^2} + \ldots + e_n dx^{n^2} \right], \left(e_\alpha = \pm 1 \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Пространство (5) допускает полную группу движений G_r порядка

$$r = \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 5\ .$$

Пространство (6) допускает полную группу гомотетических движений G_r порядка

$$r = n + \frac{(k-1)(k-2)}{2} + \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} + 1\ .$$

Эти приведенные пространства будут рассмотрены в следующих работах автора.

Список литературы

1. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности. М., 1966.

A. Egorov

About some properties of maximally moving space *T* of general theory of relativity

The space T of general theory of relativity with full group of motions of maximum order G_6 is considered. In this space there are covariantly constant tensor fields ξ^i, a_{ij}, b_{ij} .