ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Е.А.Митрофанова

КОНГРУЭНЦИИ ГИПЕРПАРАБОЛОИДОВ В П-МЕРНОМ ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В п-мерном эквиаффинном пространстве A_n рассмотрено $(n-1)$-мерное многообразие (конгруэнция) M_{n-1} гиперпараболоидов Q, имеющая, по крайней мере, одну невырожденную фокальную гиперповерхность. Найден основной объект конгруэнции M_{n-1} и получены поля некоторых геометрических объектов. Исследована конгруэнция $\overset{\circ}{M}_2$ гиперболических параболоидов в A_3, у которой на каждом параболоиде Q пара прямолинейных образующих ℓ_1, ℓ_2 разных семейств является фокальным многообразием параболоида Q. Получено безынтегральное представление конгруэнции $\overset{\circ}{M}_2$.

§I. Основной объект конгруэнции гиперпараболоидов.

Отнесем конгруэнцию M_{n-1} к реперу $R=\{A, \bar e_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,\dots,n)$, где A -фокальная точка параболоида Q, описывающая невырожденную поверхность (A), векторы $\bar e_i$ $(i,j,k=1,\dots,n-1)$ расположены в касательной гиперплоскости к гиперпараболоиду Q в точке A, а вектор $\bar e_n$ направлен по его диаметру. Уравнение параболоида Q и система пфаффовых уравнений конгруэнции M_{n-1} запишутся соответственно в виде:

$$F \equiv a_{ij} x^i x^j - 2x^n = 0, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} &da_{ij} - a_{kj}\omega^k_i - a_{ik}\omega^k_j - a_{ij}\omega^n_n = b_{ij,k}\omega^k, \\ &\omega^n_i = \lambda_{ij}\omega^j, \quad \omega^i_n = c^i_k\omega^k, \quad \omega^n = 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\det\|a_{ij}\| \neq 0$ и ω^α, ω^β_α —компоненты деривационных формул

$$d\bar A = \omega^\alpha \bar e_\alpha, \quad d\bar e_\alpha = \omega^\beta_\alpha \bar e_\beta, \tag{1.3}$$

удовлетворяющие условию эквиаффинности

$$\omega^1_1 + \omega^2_2 + \dots + \omega^n_n = 0 \tag{1.4}$$

и уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta, \quad \mathcal{D}\omega^\alpha_\beta = \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma \tag{1.5}$$

Продолжая систему (I.2), находим

$$\begin{aligned} &\delta a_{ij} = a_{kj}\pi^k_i + a_{ik}\pi^k_j - a_{ij}\pi^n_n, \\ &\delta b_{ij,k} = b_{ij,\ell}\pi^\ell_k + b_{\ell j,k}\pi^\ell_i + b_{i\ell,k}\pi^\ell_j - b_{ij,k}\pi^n_n, \\ &\delta\lambda_{ij} = \lambda_{ik}\pi^k_j + \lambda_{kj}\pi^k_i - \lambda_{ij}\pi^n_n, \\ &\delta c^j_i = c^j_k\pi^k_i - c^k_i\pi^j_k + c^j_i\pi^n_n, \end{aligned} \tag{1.6}$$

где δ - символ дифференцирования по вторичным параметрам, π^β_α -значения форм ω^β_α при фиксированных первичных параметрах.

Теорема I.I. Фундаментальный объект $\Gamma=\{a_{ij}, b_{ij,k}, \lambda_{ij}, c^j_i\}$ является основным объектом [I, с.347] конгруэнции M_{n-1}.

Доказательство. Придадим следующие начальные значения компонентам объекта Γ:

$$a_{ij} = \delta^i_j, \quad b_{ii,1} = i, \quad \lambda_{ij} = \delta^j_i, \quad c^j_i = \overset{\circ}{c}{}^j_i, \tag{1.7}$$

а все остальные компоненты $b_{ij,k}$ положим равными 0. К системе (I.6) присоединим формальную алгебраическую систему:

$$Y_{ij} = X^j_i + X^i_j, \quad Y_{ii} = 2X^i_i - X^n_n, \tag{1.8}$$

$$Y_{ij} = jX^j_i + iX^i_j \qquad (i \neq j, \text{ по индексу } i \text{ не суммировать!})$$

Г.Ф.Лаптев установил [I], что из алгебраической разрешимости формальной системы (I.8) относительно X^β_α следует разреши-

мость системы дифференциальных уравнений (I.6) относительно π^{β}_{α} в окрестности точки $(\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta};\ \overset{\circ}{b}_{ij,k};\ \overset{\circ}{\lambda}_{ij};\ \overset{\circ}{c}^{j}_{i})$.
Из уравнений (I.8),(I.4) находим

$$X^{i}_{j}=\frac{1}{j-i}\left(j\,Y_{ij}-Y_{ij,1}\right),\quad X^{i}_{i}=-\frac{1}{2}\left((n+1)\sum_{k=1}^{n-1}Y_{kk}-Y_{ii}\right),$$
$$X^{n}_{n}=-(n+1)\sum_{k=1}^{n-1}Y_{kk}.$$

Следовательно,фундаментальный объект Γ является основным объектом конгруэнции M_{n-1}.

§ 2. Поля геометрических объектов на конгруэнции M_{n-1}

Из (I.6) следует,что системы величин $\{a_{ij}\},\{\lambda_{ij}\},\{c^{j}_{i}\}$ образуют подобъекты основного объекта Γ .Симметрический тензор $\{a_{ij}\}$ определяет гиперпараболоид Q ,симметрический тензор $\{\lambda_{ij}\}$ является основным дважды ковариантным тензором фокальной гиперповерхности (A) ,тензор $\{c^{j}_{i}\}$ определяет фокальные точки диаметра $(A\bar e_n)$ гиперпараболоида Q .Пусть фокальная гиперповерхность (A) является тангенсально невырожденной, т.е.

$$\det\|\lambda_{ij}\|\neq 0. \tag{2.1}$$

Обозначим через a^{ij}, λ^{ij} —приведенные миноры матриц $\|a_{ij}\|$, $\|\lambda_{ij}\|$:

$$a^{jk}a_{ki}=\delta^{j}_{i},\quad \lambda^{jk}\lambda_{ki}=\delta^{j}_{i}. \tag{2.2}$$

На многообразии M_{n-1} определяются следующие тензоры:

$$m_{ij}=a_{ik}c^{k}_{j},\quad \hat m_{ij}=\lambda_{ik}c^{k}_{j},\quad b_{i}=a^{jk}b_{jk,i},$$
$$\hat b_{i}=\lambda^{jk}b_{jk,i},\ b^{i}=a^{ij}b_{j},\ \hat b^{i}=\lambda^{ij}\hat b_{j},\ \hat B^{i}=a^{ij}\hat b_{j}, \tag{2.3}$$
$$B^{i}=\lambda^{ij}b_{i},\quad \hat n_{i}=\lambda_{ij}b^{j},\quad n_{i}=a_{ij}\hat b^{j}$$

и абсолютный инвариант $m=a_{ij}\lambda^{ij}$.

Тензоры $\{m_{ij}\}$, $\{\hat m_{ij}\}$ определяют инвариантные гиперцилиндры

$$m_{ij}x^{i}x^{j}=0,\quad \hat m_{ij}x^{i}x^{j}=0. \tag{2.4}$$

Тензоры $\{b_i\},\{\hat b_i\},\{n_i\},\{\hat n_i\}$ определяют инвариантные гиперплоскости

$$b_{i}x^{i}=0,\quad \hat b_{i}x^{i}=0,\ n_{i}x^{i}=0,\ \hat n_{i}x^{i}=0, \tag{2.5}$$

проходящие через диаметр гиперпараболоида Q .Тензоры $\{\hat B^{i}\}$, $\{B^{i}\},\{\hat b^{i}\}$ и геометрический объект $\{b^{i},m\}$ определяют инвариантные направления:

$$\bar E_{1}=b^{i}\bar e_{i}+m\bar e_{n},\quad \bar E_{2}=\hat b^{i}\bar e_{i},\quad \bar E_{3}=B^{i}\bar e_{i},\quad \bar E_{4}=\hat B^{i}\bar e_{i}. \tag{2.6}$$

§ 3. Конгруэнции M°_{2}

О п р е д е л е н и е.Конгруэнцией M°_{2} называется конгруэнция M_2 гиперболических параболоидов Q в трехмерном эквиаффинном пространстве A_3 ,обладающая следующими свойствами: I/на гиперболическом параболоиде Q существует пара прямолинейных образующих ℓ_1,ℓ_2 разных семейств, являющихся фокальными прямыми параболоида Q [2]; 2/поверхность (A) ,где $A\equiv \ell_1\cap\ell_2$,не вырождается в линию.

Т е о р е м а 3.I.Конгруэнции M°_{2} существуют и определяются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Отнесем конгруэнцию M°_{2} к реперу $R=\{A,\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$,где векторы $\bar e_i$ $(i=1,2)$ направлены по прямым ℓ_i ,а вектор ℓ_3 —по диаметру гиперболического параболоида Q .Уравнение параболоида Q приводится к виду:

$$F\equiv x^{1}x^{2}-x^{3}=0. \tag{3.1}$$

Так как прямые ℓ_i -фокальные прямые параболоида Q ,то

$$dF\big|_{x^{3}=0}=\omega^{3}_{3}x^{1}x^{2}. \tag{3.2}$$

Используя (3.2),приходим к вполне интегрируемой системе уравнений Пфаффа

$$\omega^{3}=0,\ \omega^{3}_{3}=0,\ \omega^{i}_{j}=0,\ \omega^{3}_{i}=\omega^{j},\ \omega^{i}_{3}=m\omega^{i},\ dm=0,\quad (i,j=1,2;\ i\neq j) \tag{3.3}$$

Т е о р е м а 3.2. Конгруэнция M_2 гиперболических параболоидов Q тогда и только тогда является конгруэнцией

$\overset{\circ}{M}_2$, когда существует линейчатая квадрика $\widetilde{Q}$, которую огибают гиперболические параболоиды Q, причем в каждой точке $A \in \widetilde{Q}$ параболоиды Q и квадрика $\widetilde{Q}$, касаясь друг друга, имеют общими только пару прямолинейных образующих ℓ_1, ℓ_2, пересекающихся в точке A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть конгруэнция M_2 является конгруэнцией $\overset{\circ}{M}_2$. Используя уравнения (3.3), убеждаемся, что квадрика $\widetilde{Q}$

$$\Phi \equiv x^1 x^2 - x^3 - \frac{1}{2} m (x^3)^2 = 0 \qquad (3.4)$$

является инвариантной. Система уравнений, определяющая линию пересечения квадрик $\widetilde{Q}$ и Q, имеет вид:

$$x^3 = x^1 x^2, \quad (x^3)^2 = 0, \qquad (3.5)$$

т.е. квадрики $\widetilde{Q}$ и Q имеют общими только прямые ℓ_1, ℓ_2.

Достаточность. Пусть существует линейчатая квадрика $\widetilde{Q}$ такая, что конгруэнция M_2 образована гиперболическими параболоидами Q, касающимися квадрики $\widetilde{Q}$, причем общие точки квадрик Q и $\widetilde{Q}$ образованы только прямолинейными образующими ℓ_1, ℓ_2, пересекающимися в точке A касания квадрик Q и $\widetilde{Q}$. В репере $R = \{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_i$ направлены по прямым ℓ_i, а $\bar{e}_3$ – по диаметру параболоида Q, уравнения квадрик Q и $\widetilde{Q}$ имеют вид (3.I) и (3.4). Условие

$$d\Phi = \lambda \Phi$$

инвариантности квадрики $\widetilde{Q}$ приводит к пфаффовым уравнениям (3.3), характеризующим конгруэнции $\overset{\circ}{M}_2$.

Список литературы

I. Л а п т е в Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. "Тр. Моск. мат. об-ва", 1953, II2, 275-382.

2. М а л а х о в с к и й В.С., М а х о р к и н В.В., Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве". Тр. геом. семинара ВИНИТИ", 1974, 6, II3-I33.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

В.М. О в ч и н н и к о в

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ТОЧЕЧНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ И ПРОСТРАНСТВОМ ГИПЕР - ПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

Изучается локальное дифференцируемое отображение Ψ точечного проективного пространства P_N $(N = 2n-1)$ в пространство гиперплоскостных элементов [I] проективного пространства P_n. Во второй дифференциальной окрестности исследованы геометрические образы, ассоциированные с распределением гиперплоскостей и связанные с дифференцируемым отображением Ψ.

§I. Система дифференциальных уравнений отображения Ψ

Пусть P_n – n-мерное проективное пространство, p и π – соответственно его точка и инцидентная ей гиперплоскость. Имеем

$$N = \operatorname{rang}(p, \pi) = 2n-1.$$

Будем рассматривать дифференцируемое отображение Ψ некоторой области $V \subset P_N$ в пространство гиперплоскостных элементов.

Отображение Ψ определим следующим образом: $\Psi_1(L) = p$, $\Psi_2(L) = \pi$, причем

$$\Psi(L) = (p, \pi), \quad L \in V, \quad p \in \Psi_2(L).$$