УДК 514.7

А.И. Долгарев

(Пензенский государственный университет)

НАТУРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КРИВЫХ 3-МЕРНЫХ ОДУЛЯРНЫХ ГАЛИЛЕЕВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Данная статья — продолжение работы [1]. Доказана определяемость кривых 3-мерных одулярных галилеевых пространств натуральными уравнениями — скалярными действительными функциями кривизны и кручения.

В работе [1] получено общее описание кривых различных 3-мерных одулярных галилеевых пространств, определенных в аксиоматике Г. Вейля. Ранее [2—5] эти кривые описаны в специфике каждого пространства, а также указано одулярное пространство, не обладающее дифференциальной геометрией [6]. Ниже доказана теорема о задании кривых одулярных галилеевых пространств скалярными действительными функциями кривизны и кручения.

§ 1. Одулярные галилеевы пространства

1.1. **Одули Ли**. Структура одуля Ω над кольцом $\mathbf{K}$ определена Л.В. Сабининым [7]. Автор определяет одули Ли, вводя на группах Ли умножение их элементов на действительные числа. Группа Ли на многообразии $\mathbf{R}^3$ задается операцией, называемой сложением. Существуют только следующие разрешимые одули Ли: *линейное пространство* $\mathbf{L}^3$, *растран* $\mathbf{P}^3$, *сибсон* Σ^3, *диссон* Δ^3, *осцилляторный одуль* Ω^3.

1.2. **Дифференцирование**. *Галилеевой нормой* $||\omega||$ одуляра $\omega = (x,y,z)$ называется

$$||\omega|| = |x|, \text{ если } x \neq 0; \ ||\omega|| = \sqrt{y^2+z^2}, \text{ если } x = 0.$$

Одуляр (x,y,z) при $x \neq 0$ называется галилеевым, одуляр $(0,y,z)$ называется евклидовым. Галилеев и евклидов одуляры перпендикулярны. Одуляры $(0,y,z)$ и $(x,0,0)$ порождают соответственно 2-мерное и 1-мерное евклидовы векторные пространства и одуль Ли является полупрямой суммой этих пространств.

Для одулярных функций $\omega(t) = (x(t),y(t),z(t))$, где $t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$, $\omega(t) \in \Omega$, определены производные. Для растранной функции производная равна $\omega'(t) = \rho'(t) = (x',(e^{x'}-1)(\frac{y'}{x'}-y),\ (e^{x'}-1)(\frac{z'}{x'}-z))$, для сибсонной — $\omega'(t) = \sigma'(t) = (x',y',z'+x'(\frac{1}{2}y'-y))$, а для диссонной — $\omega'(t) = \delta' = \left(x',(e^{x'}-1)\left(\frac{y'-z'}{x'}-y\right)+(z'-zx')e^{x'},(e^{x'}-1)\left(\frac{z'}{x'}-z\right)\right)$. Функции в осцилляторном одуле недифференцируемы [6].

1.3. **Одулярные галилеевы пространства**. Заменяя линейное пространство одулем Ли в аксиоматике Г. Вейля аффинного пространства, получаем *ВО-пространства* (*вейлевские одулярные пространства)* [3] — частный случай одулярных пространств Л.В. Сабинина [7]. Имеем: *пространство Галилея* (с галилеевым векторным пространством), *ЕМ-пространство* (с растраном), *ЕС-пространство* (с сибсоном), *ЕД-пространство* (с диссоном).

§ 2. Кривые ВО-пространств

2.1. **Регулярные кривые**. Одулярная функция $\omega(t)$ класса C^3 задает регулярную кривую $\omega(t) = (t,x(t),y(t))$, при $t \in \mathbf{I}$, класса C^3 ВО-пространства в естественной параметризации. Касательные одуляры этих кривых — галилеевы и вычисляются по формулам дифференцирования одулярных функций из пункта 1.2. В пространстве Галилея $\tau = \dot{\omega}(t) = \dot{\gamma}(t) = (1, \dot{x}, \dot{y})$, в ЕМ-пространстве $\tau = \dot{\omega}(t) = \dot{\rho}(t) = (1, (e-1)(\dot{x}-x), (e-1)(\dot{y}-y))$, в ЕС-пространстве: $\tau = \dot{\omega}(t) = \dot{\sigma} = (1, \dot{x}, \dot{y} + \frac{1}{2}\dot{x} - x)$, в ЕД-пространстве $\tau = \dot{\omega}(t) = \dot{\delta} = (1, (e-1)(\dot{x}-\dot{y}-x) + e(\dot{y}-y), (e-1)(\dot{y}-y))$. Это единичные галилеевы одуляры касательных. Функции $\dot{\omega}(t)$ уже дифференцируются как векторные.

2.2. **Кривизны**. Для кривой $\omega(t)$ одулярного пространства существует векторная функция скорости

$$\vec{c}(t) = (p(t), q(t)),$$

функции $\omega(t)$ и $\vec{c}(t)$ связаны равенством

$$\dot{\omega}(t) = \alpha + h\,\vec{c}(t) \text{ при } h = 1 \text{ или } h = e-1 \text{ (см. [1]).}$$

Кривизна и кручение одулярной кривой $\omega(t)$ через компоненты функции скорости $\vec{c}(t)$ выражаются формулами

$$k_1 = \sqrt{\dot{p}^2 + \dot{q}^2}, \; k_2 = \frac{\dot{p}\ddot{q} - \dot{q}\ddot{p}}{k_1^2}.$$

2.3. **Натуральные уравнения одулярных кривых**. В одулярных пространствах справедлива следующая

Теорема. *Регулярная кривая 3-мерного одулярного галилеева пространства с дифференцируемым разрешимым одулем Ли определяется однозначно с точностью до положения в пространстве заданием двух действительных скалярных функций $k_1(t) \geq 0$ и $k_2(t)$, первая из которых является функцией кривизны кривой, а вторая — функцией кручения кривой.*

Заданы действительные скалярные функции

$$z = k_1(t) \geq 0, \; z = k_2(t), \; t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}. \qquad (1)$$

Получим по заданным скалярным функциям одулярную функцию

$$\omega(t) = (t, x(t), y(t)), \; t \in \mathbf{I} \qquad (2)$$

в каждом из 3-мерных галилеевых действительных дифференцируемых разрешимых одулярных пространств.

Функции (1) можно считать заданными в ортонормированном репере $\mathbf{P}_o = (O, \vec{i}, \vec{j})$ евклидовой плоскости. Одулярная функция $\omega(t) = (t, x(t), y(t))$ есть упорядоченный набор трех действительных функций. Этот набор функций можно отнести к некоторому реперу в ВО-пространстве. Репер $\mathbf{P}_o$ евклидовой плоскости ВО-пространства пополняем любым галилеевым одуляром α одуля Ли ВО-пространства и получаем репер $\mathbf{P} = (O, \alpha, \vec{i}, \vec{j})$ ВО-пространства. В ВО-пространстве функция $\omega(t)$ задает кривую в репере $\mathbf{P}$. Так как выбор репера $\mathbf{P}$ произволен, то одулярная функция $\omega(t)$ определяет кривую $\omega(t)$ в ВО-пространстве с точностью до положения.

Учитывая формулы кривизны и кручения кривой (п. 2.2), имеем

$$\dot{p}^2 + \dot{q}^2 = k_1^2(t),\ \dot{p}\ddot{q} - \dot{q}\ddot{p} = k_1^2(t) k_2(t).$$

По этим дифференциальным уравнениям находим функции $p(t), q(t)$, а затем в каждом из ВО-пространств получаем функции $x(t)$ и $y(t)$. Обозначив $u = \dot{p}$, $v = \dot{q}$, имеем следующую систему уравнений

$$u + v = k_1^2,\ \ u\dot{v} - \dot{u}v = k_1^2 k_2. \tag{3}$$

Первому уравнению системы удовлетворяют функции $u = k_1 \cos(w(t) + c_o)$, $v = k_1 \sin(w(t) + c_o)$, где $w(t)$ — функция, которую предстоит найти. Подставляя функции $u, v, \dot{u}, \dot{v}$ во второе уравнение системы, получаем $u\dot{v} - \dot{u}v = k_1^2 \dot{w} = k_1^2 k_2$. Отсюда $k_2 = \dot{w}$. Функция w находится в результате квадратуры

$$w(t) = \int k_2(t) dt.$$

Таким образом, $\dot{p} = k_1 \cos(w + c_o)$, $\dot{q} = k_1 \sin(w + c_o)$,

$$p(t) = \int k_1(t) \cos(w(t) + c_o) dt,\ q(t) = \int k_1(t) \sin(w(t) + c_o) dt.$$

Функции $x(t), y(t)$ являются решениями следующих систем дифференциальных уравнений:

$\dot{x}(t) = p(t)$, $\dot{y}(t) = q(t)$ — в пространстве Галилея;

$\dot{x} - x = p(t)$, $\dot{y} - y = q(t)$ — в ЕМ-пространстве;

$\dot{x} = p(t)$, $\dot{y} = q(t) - \frac{1}{2}p(t) + x$ — в ЕС-пространстве;

$\dot{y} - y = q(t)$, $\dot{x} - x = p(t) - \frac{1}{e-1}(\dot{y} - ey)$ — в ЕД-пространстве.

Указанные системы уравнений рассматриваются и в работе [1] при получении одулярных кривых по кривой скорости.

Заключение

Описание кривой натуральными уравнениями является стандартной задачей классической дифференциальной геометрии [8]. В евклидовой геометрии по двум функциям кривизны и кручения кривой отыскиваются три функции, задающие 3-мерную кривую. При этом используются формулы Френе. В галилеевой геометрии 3-мерная кривая $\omega(t)$ = $= (t, x(t), y(t))$ описывается двумя функциями $x(t), y(t)$; для получения натуральных уравнений достаточно функций $k_1(t) \geq 0$ и $k_2(t)$, а формулы Френе не нужны, хотя в одулярных пространствах они получены [2—5].

Список литературы

1. *Долгарев А.И.* Кривые 3-мерных вейлевских одулярных пространств и кривые евклидовой плоскости // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2002. Вып. 33. С. 25—28.

2. *Долгарев А.И.* Элементы дифференциальной галилеевой геометрии и одуль галилеевых преобразований. Препринт 1963. Саранск, 2003.

3. *Долгарев А.И.* ЕМ-пространства. Дис... канд. физ.-мат. наук, Красноярск, 1991.

4. *Долгарев А.И.* Дифференциальная геометрия пространства с касательным отображением в одуль галилеевых движений. Препринт 1951. Саранск, 2002.

5. *Долгарев А.И.* Кривые в одулярной дифференциальной геометрии пространства на дисоне // Изв. вузов. Поволжский регион. Сер. Естественные науки. 2003. №6(9). С. 43—49.

6. *Долгарев А.И.* Недифференцируемый одуль. // Диф. геом. многообр. фигур. Калиниград, 2001. Вып. 32. С. 34—37.

7. *Сабинин Л.В.* Одули как новый подход к геометрии со связностью // ДАН СССР. 1977. № 5. С. 800—803.

8. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. Изд. 4-е. М., 1956.

A. Dolgarew

THE NATURAL EQUATIONS OF CURVE
3-MEASURING ODULAR GALILEAN SPACES

It is proved that the curves of 3-measuring odular Galilean spaces are defined by the natural equations — scalar real functions of curvature and torsion.

УДК 514.75

Н.А. Елисеева

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ОСНАЩЕНИЯ В СМЫСЛЕ Э. КАРТАНА *L*-, *M*-ПОДРАССЛОЕНИЙ ПОЛОСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Продолжается изучение m-полосных распределений $\mathrm{H}(\mathrm{P})$ [1]. Для структурных *L*-, *M*-подрасслоений $\mathrm{H}(\mathrm{P})$-распределения построены оснащения в смысле Э. Картана. Приведены условия неподвижности оснащающих плоскостей Картана подрасслоений L и M.