Список литературы

1. *Жовтенко О.М.* Индуцированные групповые связности семейства плоскостей в проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2001. Вып. 32. С. 43 – 47.
2. *Шевченко Ю.И.* Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве // Там же. 1978. Вып. 9. С. 124 – 133.
3. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономного и неголономного гладких многообразий. Калининград, 1998.

O. Khrustaleva

ON DEGENERATE PARALLEL DISPLACEMENTS IN THE CONNECTIONS, INDUCED BOTOLOTTI′S EQUIPMENT OF THE FAMILY OF PLANES

Botolotti′s equipment of the family of planes in the projective space is considered. The coinsidence conditions induced group connection of three types are found. Parallel displacements in the connections of three types are described. They are freely and connectly degenerate.

УДК 514.75

Д.С. Чернов
(Калининградский государственный университет)

ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ НА НОРМАЛЬНО ЦЕНТРИРОВАННОЙ ТАНГЕНЦИАЛЬНО ВЫРОЖДЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В N-мерном проективном пространстве P_N рассмотрена нормально центрированная тангенциально вырожденная поверхность $S^*_{n,m}$, т.е. тангенциально

вырожденная поверхность размерности n, на каждой m-мерной плоской образующей L_m^* которой задана точка C, причем центр C описывает r-мерную (r=n-m) поверхность X_r, а касательная плоскость T_r к поверхности X_r и образующая L_m^* пересекаются лишь в центре C. С поверхностью $S_{n,m}^*$ ассоциируется главное расслоение, базой которого является r-мерная поверхность X_r, а типовым слоем – подгруппа стационарности пары плоскостей (L_m^*, T_r). Показано, что объект кривизны соответствующей связности есть тензор, содержащий 3 простейших и 4 простых подтензора.

Отнесем P_N к подвижному реперу $\{A_{I'}\}$, инфинитезимальные перемещения которого задаются формулами [1]

$$dA_{I'} = \theta_{I'}^{J'} A_{J'} \quad (I', J', K' = 0, 1, \ldots, N), \tag{1}$$

причем линейные формы $\theta_{I'}^{J'}$ удовлетворяют структурным уравнениям $D\theta_{I'}^{J'} = \theta_{I'}^{K'} \wedge \theta_{K'}^{J'}$. В качестве инвариантных форм проективной группы [2] будем рассматривать формы

$$\omega^I = \theta_0^I, \;\; \omega_J^I = \theta_J^I - \delta_J^I \theta_0^0, \;\; \omega_I = \theta_I^0 \quad (I, J, K = 1, 2, \ldots, N),$$

которые удовлетворяют следующим структурным уравнениям:

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \; D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + (\delta_K^I \omega_J + \delta_J^I \omega_K) \wedge \omega^K, \; D\omega_I = \omega_I^K \wedge \omega_K.$$

Формулы (1) теперь можно переписать в виде:

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \; dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A \;\; (\theta = \theta_0^0, \, A = A_0). \quad (1')$$

Произведем специализацию подвижного репера $R = \{A, A_a, A_i, A_\alpha\}$, где индексы принимают следующие значения: a, b, c = 1, …, m; i, j, k = m + 1, …, n; α, β, γ = n + 1, …, N. Вершины A_a репера R поместим на плоскую образующую L_m^*, A – в ее центр C, вершины A_i – на касательную плоскость

T_r к поверхности X_r. Деривационные формулы (1’) репера R примут вид:

$$dA = \theta A + \omega^i A_i,\ dA_a = \theta A_a + \omega_a^b A_b + \omega_a^i A_i + \omega_a A,$$
$$dA_i = \theta A_i + \omega_i^j A_j + \omega_i^a A_a + \omega_i^\alpha A_\alpha + \omega_i A, \qquad (1'')$$
$$dA_\alpha = \theta A_\alpha + \omega_\alpha^i A_i + \omega_\alpha^a A_a + \omega_\alpha^\beta A_\beta + \omega_\alpha A,$$

так как формы $\omega^a, \omega^\alpha, \omega_a^\alpha$ тождественно равны нулю. Поверхность $S^*_{n,m}$ можно рассматривать как r-мерное многообразие пар плоскостей (L^*_m, T_r) таких, что центрированная образующая L^*_m вместе со своей первой дифференциальной окрестностью принадлежит плоскости $T_n = L^*_m + T_r$. Поэтому все главные формы $\omega^i, \omega_a^i, \omega_i^\alpha, \omega_i^a$ должны зависеть от r главных параметров, т. е. ранг системы этих форм должен быть равен r. За r линейно независимых базисных форм выберем формы ω^i, остальные через них линейно выразим. Таким образом, получаем систему уравнений, задающую поверхность $S^*_{n,m}$ в репере *R*:

$$\omega^a = 0,\ \omega^\alpha = 0,\ \omega_a^\alpha = 0, \qquad (2)$$

$$\omega_a^i = \Lambda_{aj}^i \omega^j,\ \omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega^j,\ \omega_i^a = \Lambda_{ij}^a \omega^j. \qquad (3)$$

Замыкая систему (2), получим тождества

$$\Lambda_{ij}^\alpha = \Lambda_{ji}^\alpha,\ \Lambda_{ij}^a = \Lambda_{ji}^a,\ \Lambda_{aj}^i \Lambda_{ik}^\alpha = \Lambda_{ak}^i \Lambda_{ij}^\alpha.$$

Продолжая систему (3), получим дифференциальные сравнения

$$\Delta\Lambda_{ij}^\alpha \equiv 0,\ \Delta\Lambda_{ij}^a \equiv 0,\ \Delta\Lambda_{aj}^i - \delta_j^i \omega_a \equiv 0, \qquad (4)$$

где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^i, а дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Lambda^a_{ij} = d\Lambda^a_{ij} - \Lambda^a_{ik}\omega^k_j - \Lambda^a_{kj}\omega^k_i + \Lambda^b_{ij}\omega^a_b .$$

Объект $\Lambda = (\Lambda^\alpha_{ij}, \Lambda^a_{ij}, \Lambda^i_{aj})$ называется фундаментальным объектом первого порядка поверхности $S^*_{n,m}$ [1].

С поверхностью $S^*_{n,m}$ ассоциируется [2] главное расслоение $G(X_r)$ со структурными уравнениями

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \tag{5}$$

$$D\omega^a_b = \omega^c_b \wedge \omega^a_c + \Lambda^i_{bj}\Lambda^a_{ik}\omega^j \wedge \omega^k + \omega^i \wedge \omega^a_{bi}, \tag{6}$$

$$D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \Lambda^a_{jk}\Lambda^i_{as}\omega^k \wedge \omega^s + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \tag{7}$$

$$D\omega_i = \omega^j_i \wedge \omega_j + \omega^j \wedge \omega_{ij}, \tag{8}$$

$$D\omega_a = \omega^b_a \wedge \omega_b + \omega^i \wedge \omega_{ai}, \tag{9}$$

$$D\omega^\alpha_\beta = \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma + \omega^i \wedge \omega^\alpha_{\beta i}, \tag{10}$$

$$D\omega^a_\alpha = \omega^b_\alpha \wedge \omega^a_b + \omega^\beta_\alpha \wedge \omega^a_\beta + \omega^i \wedge \omega^a_{\alpha i}, \tag{11}$$

$$D\omega^i_\alpha = \omega^j_\alpha \wedge \omega^i_j + \omega^\beta_\alpha \wedge \omega^i_\beta + \omega^j \wedge \omega^i_{\alpha j}, \tag{12}$$

$$D\omega_\alpha = \omega^a_\alpha \wedge \omega_a + \omega^i_\alpha \wedge \omega_i + \omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta ,$$

где

$$\omega^a_{bi} = -\delta^a_b\omega_i, \ \omega^i_{jk} = \Lambda^\alpha_{jk}\omega^i_\alpha - \delta^i_j\omega_k - \delta^i_k\omega_j,$$

$$\omega_{ij} = \Lambda^\alpha_{ij}\omega_\alpha + \Lambda^a_{ij}\omega_a, \ \omega_{ai} = \Lambda^j_{ai}\omega_j, \tag{13}$$

$$\omega^i_{\alpha j} = -\delta^i_j\omega_\alpha - \Lambda^i_{aj}\omega^a_\alpha, \ \omega^\alpha_{\beta i} = -\delta^\alpha_\beta\omega_i - \Lambda^\alpha_{ji}\omega^i_\beta, \ \omega^a_{\alpha i} = -\Lambda^a_{ji}\omega^j_\alpha .$$

Эти уравнения получены внешним дифференцированием вторичных (слоевых) форм в системе (1’’). Базой главного расслоения $G(X_r)$ является поверхность центров X_r, а типовым слоем – подгруппа стационарности $G \subset GP(N)$ пары плоскостей (L^*_m, T_r). В расслоении $G(X_r)$ выделяются 3 простейших

[2] и 4 простых [2] фактор-расслоения со следующими структурными уравнениями:

1) (5,6) – расслоение плоско-образующих линейных реперов $L_{m^2}(X_r)$ с типовым слоем – линейной фактор-группой L_{m^2} =GL(m), действующей неэффективно в пучке прямых, принадлежащих образующей L^*_m, с центром в точке A;

2) (5,7) – расслоение касательных линейных реперов $L_{r^2}(X_r)$ с типовым слоем – линейной фактор-группой L_{r^2} =GL(r), действующей неэффективно в пучке прямых, принадлежащих касательной плоскости T_r, с центром в точке A;

3) (5,10) – расслоение нормальных линейных реперов $L_{(N-n)^2}(X_r)$ с типовым слоем – линейной фактор-группой $L_{(N-n)^2}$ =GL(N-n), действующей неэффективно в (N-n-1)-мерном проективном пространстве $P_{N-n-1} = P_N / T_n$, возникающем при факторизации по коллинеарности из (N-n)-мерного линейного фактор-пространства $L_{N-n} = L_{N+1} / L_{n+1}$, где линейное подпространство L_{N+1} и его подпространство L_{n+1} порождают, соответственно, проективное пространство P_N и подпространство T_n;

4) (5,6,9) – расслоение плоско-образующих коаффинных реперов $C_{m(m-1)}(X_r)$ с типовым слоем – коаффинной фактор-группой $C_{m(m-1)}$ =*GA'*(m), действующей эффективно в плоской образующей L^*_m;

5) (5,7,8) – расслоение касательных коаффинных реперов $C_{r(r-1)}(X_r)$ с типовым слоем – коаффинной фактор-группой $C_{r(r-1)}$ =GA'(m), действующей эффективно в плоскости T_r;

6) (5,6,10,11) – расслоение $H_{(N-n)^2+m^2+m(N-n)}(X_r)$ с типовым слоем – аффинной фактор-группой [4] $H_{(N-n)^2+m^2+m(N-n)}$, действующей неэффективно в (N-r-1)-мерном проективном фактор-пространстве $P_{N-r-1}=P_N/T_r$, содержащем пространство $P_{N-n-1}=P_N/T_n$;

7) (5,7,10,12) – расслоение $K_{r^2+(N-n)^2+r(N-n)}(X_r)$ с типовым слоем – аффинной фактор-группой $K_{r^2+(N-n)^2+r(N-n)}$, действующей неэффективно в (N-m-1)-мерном проективном фактор-пространстве $P_{N-m-1}=P_N/L^*_m$, содержащем подпространство $P_{N\text{-}n\text{-}1}$.

Связность в главном расслоении $G(X_r)$ зададим с помощью поля объекта связности $\Gamma=(\Gamma^a_{bi},\Gamma^i_{jk},\Gamma_{ij},\Gamma_{ai},\Gamma^\alpha_{\beta i},\Gamma^a_{\alpha i},\Gamma^i_{\alpha j},\Gamma_{\alpha i})$. Дифференциальные уравнения его компонент получим следующим образом [2]. Рассмотрим, например, слоевые формы ω^a_α и преобразуем их с помощью гладких функций $\Gamma^a_{\alpha i}$: $\tilde\omega^a_\alpha=\omega^a_\alpha-\Gamma^a_{\alpha i}\omega^i$. Продифференцировав формы $\tilde\omega^a_\alpha$ внешним образом и применив теорему Картана – Лаптева, получаем дифференциальные уравнения

$$\Delta\Gamma^a_{\alpha i}-\Gamma^a_{bi}\omega^b_\alpha+\Gamma^\beta_{\alpha i}\omega^a_\beta+\omega^a_{\alpha i}=\Gamma^a_{\alpha ij}\omega^j. \tag{14}$$

Внешние дифференциалы форм $\tilde\omega^a_\alpha$ примут вид:

$$D\tilde\omega^a_\alpha=\tilde\omega^b_\alpha\wedge\tilde\omega^a_b+\tilde\omega^\beta_\alpha\wedge\tilde\omega^a_\beta+R^a_{\alpha ij}\omega^i\wedge\omega^j,$$

$$R^a_{\alpha ij}=\Gamma^a_{\alpha[ij]}-\Gamma^b_{\alpha[i}\Gamma^a_{|b|j]}-\Gamma^\beta_{\alpha[i}\Gamma^a_{|\beta|j]}. \tag{15}$$

Функции $R^a_{\alpha ij}$ являются компонентами объекта кривизны R связности Γ. Проделывая эту операцию над остальными слоевыми формами, получаем вместе с (14) систему дифференциальных уравнений объекта связности:

$$\Delta\Gamma^a_{bi}+\omega^a_{bi}=\Gamma^a_{bij}\omega^j,\ \Delta\Gamma_{ai}+\Gamma^b_{ai}\omega_b+\omega_{ai}=\Gamma_{aij}\omega^j,$$

$$\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jks}\omega^s,\ \Delta\Gamma_{ij} + \Gamma^k_{ij}\omega_k + \omega_{ij} = \Gamma_{ijk}\omega^k, \tag{16}$$

$$\Delta\Gamma^\alpha_{\beta i} + \omega^\alpha_{\beta i} = \Gamma^\alpha_{\beta ij}\omega^j,\ \Delta\Gamma^i_{\alpha j} - \Gamma^i_{kj}\omega^k_\alpha + \Gamma^\beta_{\alpha j}\omega^i_\beta + \omega^i_{\alpha j} = \Gamma^i_{\alpha jk}\omega^k,$$

$$\Delta\Gamma_{\alpha i} + \Gamma^j_{\alpha i}\omega_j + \Gamma^a_{\alpha i}\omega_a - \Gamma_{ai}\omega^a_\alpha + \Gamma^\beta_{\alpha i}\omega_\beta - \Gamma_{ji}\omega^j_\alpha = \Gamma_{\alpha ij}\omega^j.$$

Объект связности Г содержит 3 простейших и 4 простых подобъекта: (Γ^a_{bi}) – объект плоско-образующей линейной связности; (Γ^i_{jk}) – объект касательной линейной связности; ($\Gamma^\alpha_{\beta i}$) – объект нормальной линейной связности; ($\Gamma^a_{bi}, \Gamma_{ai}$) – объект плоско-образующей коаффинной связности; ($\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}$) – объект касательной коаффинной связности; (Γ^a_{bi} , $\Gamma^\alpha_{\beta i}$, $\Gamma^a_{\alpha i}$) – объект Н-связности, содержащий подобъекты плоско-образующей и нормальной линейных связностей; ($\Gamma^i_{jk}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \Gamma^i_{\alpha j}$) – объект К-связности, содержащий подобъекты касательной и нормальной линейных связностей.

Выражения компонент объекта кривизны $R = (R^a_{\alpha ij}, R^\alpha_{\beta ij}, R^i_{\alpha jk}, R^a_{bij}, R_{aij}, R^i_{jks}, R_{ijk}, R_{\alpha ij})$ через компоненты объекта связности и их пфаффовы производные имеют вид (14_2) и следующий:

$$R^a_{bij} = \Gamma^a_{b[ij]} - \Gamma^c_{b[i}\Gamma^a_{|c|j]} + \Lambda^k_{b[i}\Lambda^a_{|k|j]},\ R^\alpha_{\beta ij} = \Gamma^\alpha_{\beta[ij]} - \Gamma^\gamma_{\beta[i}\Gamma^\alpha_{|\gamma|j]},$$

$$R^i_{\alpha jk} = \Gamma^i_{\alpha[jk]} - \Gamma^s_{\alpha[j}\Gamma^i_{|s|k]} - \Gamma^\beta_{\alpha[j}\Gamma^i_{|\beta|k]},\ R_{aij} = \Gamma_{a[ij]} - \Gamma^b_{a[i}\Gamma_{|b|j]},$$

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^s_{j[k}\Gamma^i_{|s|l]} + \Lambda^a_{j[k}\Lambda^i_{|a|l]},\ R_{ijk} = \Gamma_{i[jk]} - \Gamma^s_{i[j}\Gamma_{|s|k]},$$

$$R_{\alpha ij} = \Gamma_{\alpha[ij]} - \Gamma^s_{\alpha[i}\Gamma_{|s|j]} - \Gamma^a_{\alpha[i}\Gamma_{|a|j]} - \Gamma^\beta_{\alpha[i}\Gamma_{|\beta|j]}.$$

Продолжая систему (16) с использованием сравнений (4) и обозначений (13) и действуя на компоненты объекта R оператором Δ, получаем дифференциальные сравнения

$$\Delta R^{\alpha}_{\beta ij} \equiv 0\,,\ \Delta R^{a}_{bij} \equiv 0\,,\ \Delta R^{i}_{jkl} \equiv 0\,,\ \Delta R_{ijk} + R^{s}_{ijk}\omega_s \equiv 0\,,$$

$$\Delta R_{aij} + R^{b}_{aij}\omega_b \equiv 0\,,\ \Delta R^{a}_{\alpha ij} - R^{\beta}_{\alpha ij}\omega^{a}_{\beta} - R^{a}_{bij}\omega^{b}_{\alpha} \equiv 0\,,$$

$$\Delta R^{i}_{\alpha jk} + R^{\beta}_{\alpha jk}\omega^{i}_{\beta} - R^{i}_{sjk}\omega^{s}_{\alpha} \equiv 0\,,$$

$$\Delta R_{\alpha ij} + R^{k}_{\alpha ij}\omega_k + R^{a}_{\alpha ij}\omega_a - R_{aij}\omega^{a}_{\alpha} + R^{\beta}_{\alpha ij}\omega_{\beta} - R_{kij}\omega^{k}_{\alpha} \equiv 0\,.$$

Теорема. *Объект кривизны связности в расслоении, ассоциированном с нормально центрированной тангенциально вырожденной поверхностью, есть тензор, содержащий 3 простейших подтензора* (R^{a}_{bij}), (R^{i}_{jkl}), ($R^{\alpha}_{\beta ij}$) *и 4 простых подтензора* (R_{aij}, R^{a}_{bij}), (R_{ijk}, R^{i}_{jkl}), ($R^{a}_{bij}, R^{\alpha}_{\beta ij}, R^{a}_{\alpha ij}$), ($R^{i}_{jkl}, R^{\alpha}_{\beta ij}$, $R^{i}_{\alpha jk}$).

Список литературы

1. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

2. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

3. *Шевченко Ю.И.* Связности в главных расслоениях, ассоциированных с тангенциально вырожденными поверхностями в проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1976. Вып. 7. С. 139 – 145.

4. *Шевченко Ю.И.* Аффинная, коаффинная и линейная фактор-группы в подгруппе проективной группы // Пробл. мат. и физ. наук. Калининград, 2002. С. 38 – 39.

D. Chernov

THE CURVATURE TENSOR ON A NORMALLY CENTERED TANGENTIAL DEGENERATED SURFACE

In N-dimensional projective space P_N the normally centered tangential degenerated surface $S^{*}_{n,m}$ is considered, i.e. the tangential degenerated surface of n dimension, on everyone m-dimensional

flat generator L^*_m with which the point C is given, and the centre C describes the r-dimensional (r=n-m) surface X_r, and the tangent plane T_r to a surface X_r and generator L^*_m are intersected only at the centre C. With a surface $S^*_{n,m}$ the principal bundle is associated, which base is the surface X_r, and the typical fiber – the stationarity subgroup of pair planes (L^*_m, T_r). It is shown, that the curvature object of appropriate connection is a tensor containing 3 elementary and 4 simple subtensors.

УДК 514.75

М.А. Чешкова
(Алтайский государственный университет)

О ТРУБЧАТОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E^n

Рассмотрена каналовая гиперповерхность *M* в евклидовом пространстве E^n – огибающая однопараметрического семейства гиперсфер. Если гиперсферы имеют постоянный радиус, то гиперповерхность *M* называется трубчатой.

Рассмотрим гладкую гиперповерхность в евклидовом пространстве E^n.

Обозначим F(M) – R-алгебру дифференцируемых на M функций, T^q_s – F-модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (q,s), $\chi(M)$ – алгебру Ли векторных полей на M, ∂ – дифференцирование, $\langle , \rangle$ – скалярное произведение в E^n.

Формулы Гаусса – Вейнгартена гиперповерхности M имеют вид [1, с. 36]:

$$\partial_X Y = \nabla_X Y + \beta(X,Y)n, \ \partial_X n = -AX, \qquad (1)$$