Следовательно, $rang \| \xi^i_\alpha \| = 2$, и на распределении Λ^2 возникает $(f\xi\eta\rho)$ - структура рода $(m,2,m,2)$.

в/ $\mathcal{V}_x \cap F\mathcal{V}_x = S_x$, $\dim S_x = 1$.

Такой случай в классе III невозможен.

с/ $\mathcal{V}_x \cap F\mathcal{V}_x = S_x$, $\dim S_x = 2$,т.е. $(\mathcal{V}_x \equiv F\mathcal{V}_x)$.

Это условие эквивалентно равенству $\xi^i_\alpha = 0$. В этом случае на распределении Λ^2 возникает $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(m,0,m,2)$,т.е. почти комплексная структура.

Замечание 2. $(f\xi\eta\rho)$-структура класса IIIa в классификации Н.Д.Полякова [2] относится к классу A_2, а класса IIIc к классу A_1 и соответствует строке 1 таблицы 1.

Имеют место следующие предложения:

Предложение 1. На распределении элементов коразмерности два Λ^2 в многообразии почти комплексной структуры M_n ,в случае,когда элемент Λ_x пересекается образом $F\Lambda_x$ по минимально возможной размерности при всевозможных оснащениях распределения Λ^2 полями двумерных нормалей,индуцируются $(f\xi\eta\rho)$-структуры следующих родов: $(m,2,m-2,2)$, $(m-1,2,m-2,1)$, $(m-2,2,m-2,0)$, $(m,0,m-2,2)$ и только такие.

Предложение 2. На распределении элементов коразмерности два в многообразии почти комплексной структуры M_n ,в случае,когда элемент Λ_x совпадает с образом $F\Lambda_x$,при различном оснащении распределения Λ^2 полями двумерных нормалей индуцируются $(f\xi\eta\rho)$-структуры следующих родов: $(m,2,m,2)$, $(m,0,m,2)$ и только такие.

Список литературы

1.Лаптев Г.Ф.,Остиану Н.М. $(f\xi\eta\rho)$-структура на дифференцируемых многообразиях.- В сб.:Проблемы геом. Т.7.Итоги науки и техн. М.,1975,с.5-22.

2.Поляков Н.Д. Классификация $(f\xi\eta\rho)$-структур.- В сб.:Проблемы геометрии .Т.14. Итоги науки и техн. М.,1982,с.57-72.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.14 1983

УДК 514.75

Б.А.Андреев

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ И ГИПОХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЯ f

Продолжается изучение локального дифференцируемого отображения f [4],[5] точечного (проективного или аффинного) пространства P_N в пространство $R(p,q)$ неинцидентных пар (p,q) ,состоящих из точки p и невырожденной гиперквадрики q проективного пространства P_n , причем $N = rang(p,q)$ [1] и $rang f = N$ в каждой точке области определения.Введены понятия характеристических,собственно характеристических и гипохарактеристических направлений,являющиеся обобщениями понятия характеристических направлений теории точечных отображений [3].

Получены различные геометрические характеристики введенных понятий.В статье используются обозначения, принятые в работах [4],[5].

Пусть P° -произвольная точка области определения отображения f ,$(p^\circ,q^\circ) = f(P^\circ)$, i -отображение,которое паре (p,q) ставит в соответствие индуцируемую ею пару нуль-пару (p,π) , $(p^\circ,\pi^\circ) = i(p^\circ,q^\circ)$, $F = (i\circ f)^{-1}(p^\circ,\pi^\circ)$, а $\mathfrak{F}$ -многообразие невырожденных гиперквадрик q ,относительно которых элементы пары (p°,π°) находятся в полярном соответствии.Имеем: $P^\circ \in F$, $\dim F = \dim \mathfrak{F} = N - 2n \overset{d}{=} \bar{N}$. Пусть $\mathfrak{h}$ -многообразие пар (p,q) ,для которых C-образы [5,стр.7] $C(q)$ гиперквадрик q совпадают с гиперквадрикой q° ,а $\mathcal{H} = f^{-1}(\mathfrak{h})$.Имеем: $P^\circ \in \mathcal{H}$, $\dim \mathcal{H} = 2n$, и многообразия F и $\mathcal{H}$ трансверсальны в P°.Обозначим касательные подпространства к F и $\mathcal{H}$ в P° соответственно L и H .Поместим вершины R_α $(\alpha,\ldots = \overline{1,\bar{N}})$ и $R_{\hat{\alpha}}$ $(\hat{\alpha},\ldots = \overline{\bar{N}+1,N})$ подвижного репера пространства P_N

соответственно в подпространства L и H, построенные для точки $P^\circ = R_0$. Тогда для компонентов фундаментального объекта 1-го порядка отображения f получаем: $\Lambda^i_\alpha = 0, \Lambda_{i\alpha} = 0, \Lambda_{ij\hat{\alpha}} = 0$. Из (2.5)-(2.7) [4] при этом вытекает:

$$\Lambda_{ij\alpha} V^{\alpha k l} = \frac{1}{2}\delta^k_{(i}\delta^l_{j)}, \quad \Lambda_{ij\alpha} V^{\beta ij} = \delta^\beta_\alpha, \quad \Lambda^i_{\hat{\alpha}} V^{\hat{\alpha}}_j = \delta^i_j,$$
$$\Lambda_{i\hat{\alpha}} V^{\hat{\alpha} j} = \delta^j_i, \quad \Lambda^i_{\hat{\alpha}} V^{\hat{\beta}}_i + \Lambda_{i\hat{\alpha}} V^{\hat{\beta} i} = \delta^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}. \tag{1}$$

Зафиксируем в P_N гиперплоскость $\Pi^\circ \not\ni P^\circ$ и поместим в нее вершины R_J $(J,\ldots = \overline{1,N})$ репера. На множестве $P_N \setminus \Pi^\circ$ подгруппа стационарности гиперплоскости Π° действует как группа аффинных преобразований. Охватываемые фундаментальным объектом 2-го порядка отображения f системы величин

$$\Gamma^{\hat{\alpha}}_{JK} = V^{\hat{\alpha} i}\Lambda_{iJK} + V^{\hat{\alpha}}_i \Lambda^i_{JK}, \quad \Gamma^\alpha_{JK} = V^{\alpha ij}\Lambda_{ijJK} \tag{2}$$

являются тензорами. Пусть $(p, q) = f(P)$, а $Q = C(q)$ — C-образ гиперквадрики q, построенный с помощью нуль-пары (p°, π°). Тогда отображение $f_Q : P \in P_N \mapsto Q \in \mathcal{F}$ задается формулой (2.3) [5]. Для тензора $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ из (1), (2) получаем

$$\Lambda_{ij\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\Lambda_{ij\gamma}. \tag{3}$$

Легко убедиться, что формы Ω^α_0, $\theta^\alpha_\beta \stackrel{d}{=} \Omega^\alpha_\beta - \delta^\alpha_\beta \Omega^0_0 - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\Omega^\gamma_0$ удовлетворяют на многообразии F уравнениям структуры пространства аффинной связности, и, т.о., тензор $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ определяет на F аффинную связность. Будем обозначать эту связность Γ, а связность, определяемую на F нормалями H, — буквой γ. Сравнивая (3) с (5.2) [3], приходим к выводу, что связность Γ является аналогом связности Врэнчану [3, §5] точечного соответствия для отображения $\varphi = f_Q|_F$.

Направление в P°, задаваемое тензором Λ^J, будем называть характеристическим направлением, если Λ^J удовлетворяет системе

$$\Lambda_{ijJK}\Lambda^J\Lambda^K - 2\sigma\Lambda_{ijJ}\Lambda^J = 0. \tag{4}$$

Такие направления рассматривались в [5]. Характеристическое направление, лежащее в L, будем называть собственно характеристическим направлением.

П р е д л о ж е н и е 1. Направление, определяемое в точке P° инфлексионной в ней кривой $\ell: R \to P_N$ будет характеристическим в том и только в том случае, если фокальные многообразия [2, с. 117] кривой $f_Q \circ \ell$ 1-го и 2-го ранга для гиперквадрики $f_Q(P^\circ)$ совпадают.

П р е д л о ж е н и е 2. Направление, касательное к многообразию F, будет собственно характеристическим в том и только в том случае, если определяющие это направление геодезические связностей Γ и γ имеют геометрическое касание 2-го порядка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть рассматриваемое направление определяется тензором Λ^J, где $\Lambda^{\hat{\alpha}} = 0$. Геодезические связностей Γ и γ имеют соответственно следующие разложения по степеням своих канонических параметров:

$$x^\alpha = \Lambda^\alpha t - \frac{1}{2}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\Lambda^\beta\Lambda^\gamma t^2 + \langle 3\rangle, \quad x^{\hat{\alpha}} = \langle 2\rangle, \tag{5}$$
$$x^\alpha = \Lambda^\alpha\tau + \langle 3\rangle, \quad x^{\hat{\alpha}} = \langle 2\rangle. \tag{6}$$

Из условия геометрического касания этих кривых получаем: $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha\Lambda^\beta - 2k\Lambda^\gamma = 0, \Lambda^{\hat{\alpha}} = 0$, что эквивалентно системе, определяющей собственно характеристические направления.

Конус χ характеристических направлений, наряду с системой (4), можно задавать с помощью эквивалентной ей системы

$$\Lambda_{p[i|JK}\Lambda_{q|j]L}\Lambda^J\Lambda^K\Lambda^L = 0, \tag{7}$$

как это делается в теории точечных соответствий (см. (1.14) [3]). В нашем случае можно ввести в рассмотрение конус $\overline{\chi}$, определяемый системой

$$a^{pq}\Lambda_{p[i|JK}\Lambda_{q|j]L}\Lambda^J\Lambda^K\Lambda^L = 0, \tag{8}$$

где a^{pq} — тензор, взаимный тензору a_{ij}, определяющего гиперквадрику q° уравнениями (1.1) [4].

О п р е д е л е н и е 1. Направления, определяемые конусом $\overline{\chi}$ (8), называются гипохарактеристическими направлениями.

Очевидно, любое характеристическое направление является гипохарактеристическим: $\chi \subset \overline{\chi}$. Для геометрической характеристики гипохарактеристических направлений рассмотрим касательное к φ в точке P° отображение K:

$$b_{ij} = a_{ij} + \Lambda_{ij\alpha} X^\alpha. \qquad (9)$$

Пусть a -параллельный перенос подпространства L аффинного пространства $A_N = P_N \setminus \Pi^\circ$ на лежащий в L вектор A с координатами $-V^{\alpha ij} a_{ij}$. Вектор A является значением отображения K^{-1} на сдвоенной гиперплоскости π°. Композицию $\bar{K} = K \circ a$: $b_{ij} = \Lambda_{ij\alpha} X^\alpha$ будем называть псевдокасательным в P° отображением. Отображение $\bar{K}$ определено на подпространстве L. Пусть $B = L \setminus \bar{K}^{-1}(\mathcal{F})$. Заметим, что B -граница $\bar{K}^{-1}(\mathcal{F})$ в L. Пусть $R(q,\tau)$ -многообразие всех инцидентных пар (q,τ), где τ -точка, а $q \in \mathcal{F}$. Отображение $\bar{K}$ порождает отображение $\varkappa$: $R(q,\tau) \to B$, определяемое следующим образом. Пусть $Q(q,\tau)$ -гиперквадрика, распавшаяся на пару плоскостей, одна из которых касается гиперквадрики q в точке τ, а другая- во второй точке пересечения прямой $[p^\circ, \tau]$ с гиперквадрикой q. Положим $\varkappa(q,\tau) = \bar{K}^{-1}(Q(q,\tau))$. Рассмотрим семейство гиперквадрик $q^\circ(t)$: $t a_{ij} x^i x^j + (x^\circ)^2 = 0$, гомологичных гиперквадрике q° при гомологиях с центром p° и гиперплоскостью π°. Подпространство L находится в естественном взаимно-однозначном соответствии с множеством касательных в точке P° к многообразию F векторов. Поэтому указанное векторное пространство также будем обозначать L. Пусть $v \in L$, $q = \bar{K}(v)$, а $T(v)$ -множество точек, в которых гиперквадрики семейства $q^\circ(t)$ касаются гиперквадрики $\bar{K}(v)$.

О п р е д е л е н и е 2. θ -оболочкой $\theta(v)$ вектора $v \in L$ будем называть линейную оболочку множества

$$\bigcup_{\tau \in T(v)} \{\varkappa(\bar{K}(v), \tau)\}. \qquad (10)$$

Легко показать: 1/ $v \in \theta(v)$, 2/ $u \in \theta(v) \Rightarrow v \in \theta(u), \forall u, v \in L$. Из определения 2 получаем уравнения θ -оболочки вектора $v = \{Y^\alpha\}$:

$$a^{pq} \Lambda_{pi[\alpha} \Lambda_{|qj|\beta]} Y^\alpha X^\beta = 0. \qquad (11)$$

Пусть кривая ℓ: $R \to P_N$, $\ell(0) = P^\circ$ инфлексионна в P°, т.е. разложение ее в ряд Тейлора имеет вид $X^\jmath = \Lambda^\jmath t + \frac{1}{2} k \Lambda^\jmath t^2 + \langle 3 \rangle$, $t \in R$. Пусть $\Lambda = \{\Lambda^\jmath\} \notin H$. Проекцию вектора Λ с началом в P° вдоль H на L обозначим $\pi(\Lambda)$.

П р е д л о ж е н и е 3. Направление Λ, определяемое в точке P° инфлексионной в ней кривой ℓ, будет характеристическим в том и только в том случае, если для кривой $K^{-1} \circ f_Q \circ \ell$: $Y^\alpha = \Lambda^\alpha t + \frac{1}{2} M^\alpha t^2 + \langle 3 \rangle$ вектор $\{M^\alpha\} \in L$ коллинеарен вектору $\pi(\Lambda)$.

П р е д л о ж е н и е 4. Направление Λ, определяемое в точке P° инфлексионной в ней кривой ℓ, будет гипохарактеристическим в том и только в том случае, если для кривой $K^{-1} \circ f_Q \circ \ell$ вектор $\{M^\alpha\}$ принадлежит θ -оболочке вектора $\pi(\Lambda)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.3)[5] и (9) получаем: $M^\alpha = \Gamma^\alpha_{\jmath\varkappa} \Lambda^\jmath \Lambda^\varkappa + k \Lambda^\alpha$. Доказываемые предложения теперь вытекают из (8),(11).

Предложения 3 и 4 показывают, что понятие гипохарактеристических направлений является обобщением понятия характеристических направлений.

Список литературы

1. Малаховский В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.-Тр. геометр.семинара ВИНИТИ АН СССР,1969,с.179-206.

2. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.-Тр.геометр.семинара ВИНИТИ АН СССР, 1974,с.113-134.

3. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами.-Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР, Геометрия ,1963 ,1965,с.65-107.

4. Андреев Б.А. О дифференциальной геометрии соответствий между пространством пары (p,q) и точечным пространством.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.2,Калининград,1971,с.28-37.

5. Андреев Б.А. Характеристические направления соответствия между точечным пространством и пространством пары (p,q).-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.6,Калининград,1975,с.5-18.