УДК 514.75

Н. А. Кузьмина

(*Чувашский государственный педагогический университет*)

ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАРТАНА

Работа посвящена изучению некоторых вопросов дифференциальной геометрии распределения Картана M в проективном пространстве P_{2m}.

Исследования проводятся методом внешних дифференциальных форм Э. Картана [8] и методом продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева [2].

На протяжении всего изложения индексы принимают следующие значения:

$$\bar{I}, \bar{K}, \bar{L} = \overline{0,\ 2m};\ I, K, L = \overline{1, 2m};\ i, j, k, s = \overline{1,\ m};\ \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1,\ 2m}.$$

Рассмотрим проективное пространство P_{2m}, отнесенное к подвижному реперу $R = \{A_{\bar{I}}\}$. Дифференциальные уравнения бесконечно малых перемещений репера имеют вид:

$$dA_{\bar{I}} = \omega_{\bar{I}}^{\bar{K}} A_{\bar{K}}, \tag{1}$$

где дифференциальные формы Пфаффа $\omega_{\bar{I}}^{\bar{K}}$ подчинены структурным уравнениям проективного пространства [8]:

$$D\omega_{\bar{I}}^{\bar{K}} = \omega_{\bar{I}}^{\bar{L}} \wedge \omega_{\bar{L}}^{\bar{K}},\ \omega_{\bar{L}}^{\bar{L}} = 0. \tag{2}$$

В проективном пространстве P_{2m} рассмотрим распределение касательных элементов (A_0, Π_m) (центр A_0 принадлежит соответствующей ему плоскости Π_m) [3]. В репере нулевого порядка (вершины репера A_0, A_i расположены в соответствствующей плоскости распределения, причем A_0 совпадает с его центром) система дифференциальных уравнений распределения m-мерных линейных элементов имеет вид [3]:

$$\omega_i^\alpha = \Lambda_{iL}^\alpha \omega_0^L . \tag{3}$$

Продолжая уравнения системы (3) имеем:

$$d\Lambda_{ij}^\alpha + \Lambda_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha - \Lambda_{ik}^\alpha \omega_j^k - \Lambda_{kj}^\alpha \omega_i^k + \Lambda_{ij}^\alpha \omega_0^0 = \Lambda_{ijL}^\alpha \omega_0^L , \tag{4, а}$$

$$\begin{gathered} d\Lambda_{i\beta}^\alpha + \Lambda_{i\beta}^\gamma \omega_\gamma^\alpha - \Lambda_{i\gamma}^\alpha \omega_\beta^\gamma - \Lambda_{k\beta}^\alpha \omega_i^k + \Lambda_{i\beta}^\alpha \omega_0^0 - \\ - \Lambda_{ik}^\alpha \omega_\beta^k - \delta_\beta^\alpha \omega_i^0 = \Lambda_{i\beta L}^\alpha \omega_0^L , \end{gathered} \tag{4, б}$$

где

$$\Lambda_{i[jk]}^\alpha = \Lambda_{i\beta}^\alpha \Lambda_{[jk]}^\beta , \quad \Lambda_{ij\beta}^\alpha - \Lambda_{i\beta j}^\alpha = \Lambda_{i\gamma}^\alpha \Lambda_{j\beta}^\gamma .$$

Совокупность функций $\left\{\Lambda_{ij}^\alpha\right\}$ есть тензор первого порядка, вообще говоря, не симметричный. Тензор $\left\{\Lambda_{ij}^\alpha\right\}$ образует подобъект объекта $\left\{\Lambda_{iL}^\alpha\right\}$.

Компоненты тензора $a_{ij}^\alpha = \frac{1}{2}\left(\Lambda_{ij}^\alpha + \Lambda_{ji}^\alpha\right)$ первого порядка, симметричного по индексам i, j, в силу (4, а) удовлетворяют уравнениям

$$da_{ij}^\alpha + a_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha - a_{ik}^\alpha \omega_j^k - a_{kj}^\alpha \omega_i^k + a_{ij}^\alpha \omega_0^0 = a_{ijL}^\alpha \omega_0^L . \tag{5}$$

Допустим, что:

1) число линейно независимых квадратичных асимптотических форм $\Phi^\alpha = a_{ik}^\alpha \omega_0^i \omega_0^k$ на распределении равно m;

2) распределение М несет ткань сопряженных линий, т. е. направления касательных к линиям ткани $\Sigma \subset \mathrm{M}$ попарно сопряжены относительно любого конуса направлений $\Phi^\alpha = 0$.

Такое распределение, по аналогии с поверхностью Картана [9], назовем *распределением Картана*.

Отнесем репер R к сопряженной ткани Σ (вершины A_i репера выбираем на касательных к линиям ткани). Тогда справедливо:

$$a_{ij}^{\alpha} = 0, i \neq j\,; \tag{6}$$

в выбранном репере первого порядка уравнения ткани имеют вид [7]:

$$\omega_i^j = a_{iK}^j \omega_0^K,\, i \neq j\,. \tag{7}$$

Из дифференциальных уравнений (5), равенств (6) находим:

$$a_{ii}^{\alpha}\, a_{jK}^i + a_{jj}^{\alpha}\, a_{iK}^j = -a_{ijK}^{\alpha},\, i \neq j\,. \tag{8}$$

В силу линейной независимости m форм Φ^{α} справедливо $a \stackrel{def}{=} \left|a_{ii}^{\alpha}\right| \neq 0$; следовательно, существует обратная $m \times m$ матрица из элементов a_{α}^{ii}, определяемых соотношениями

$$a_{ss}^{\alpha}\, a_{\beta}^{ss} = \delta_{\beta}^{\alpha}, \quad a_{ii}^{\gamma}\, a_{\gamma}^{kk} = \delta_i^k\,. \tag{9}$$

Совокупность функций a_{α}^{ii} при любом фиксированном i представляет собой тензор первого порядка.

Из соотношений (8) в силу (9) имеем

$$a_{jK}^{\,i} = -a_{\alpha}^{ii}\, a_{ijK}^{\alpha},\, i \neq j\,. \tag{10}$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Сопряженная ткань Σ на распределении Картана во второй дифференциальной окрестности внутренним образом определена самим распределением Картана*.

Известно [3], что распределение m-мерных линейных элементов является голономным тогда и только тогда, когда обращается в нуль кососимметричный тензор $\Lambda_{[jk]}^{\alpha}$.

Определение. *Говорят* [1], *что ткань $\Sigma \subset \mathrm{M}$ голономна, если любое из уравнений $\omega_0^i = 0$ вполне интегрируемо.*

Условием полной интегрируемости уравнения $\omega_0^i = 0$ при фиксированном i является обращение в нуль кососимметричного тензора $a^i_{[jk]}, i \neq j, k$.

В работе доказаны

Теорема 2. *Если распределение m-мерных линейных элементов* M *в проективном пространстве* P_{2m} *голономно, то ткань* $\Sigma \subset \mathrm{M}$ *голономна*; *при этом при* $m > 2$ *ткань* Σ *есть m-сопряженная система в смысле Р. В. Смирнова* [5].

Теорема 3. *Голономное распределение Картана при* $m > 2$ *существует с произволом* $m(m-1)$ *функций* $m+2$ *аргументов*.

Определитель a есть относительный инвариант:

$$d\ln a + (m-1)\omega_0^0 - 3\omega_s^s = A_K \omega_0^K , \tag{11}$$

где $A_K = a_\alpha^{ss} a_{ssK}^\alpha$.

Согласно [3] дифференциальные уравнения поля объекта $\left(\nu_\alpha^i, \nu_\alpha^0\right)$, определяющего инвариантное оснащение в смысле Э. Картана распределения Картана $\mathrm{M} \subset P_{2m}$, в выбранном репере первого порядка имеют следующий вид:

$$\begin{cases} d\nu_\alpha^i + \nu_\alpha^i \omega_i^i - \nu_\beta^i \omega_\alpha^\beta + \omega_\alpha^i = \nu_{\alpha L}^i \omega_0^L , & (12) \\ d\nu_\alpha^0 - \nu_\beta^0 \omega_\alpha^\beta + \nu_\alpha^0 \omega_0^0 - \nu_\alpha^i \omega_i^0 + \omega_\alpha^0 = \nu_{\alpha L}^0 \omega_0^L . & (13) \end{cases}$$

Подобъект ν_α^i объекта оснащения определяет инвариантную нормаль первого рода [4]. Инвариантно присоединенное к распределению Картана $\mathrm{M} \subset P_{2m}$ поле нормалей второго рода [4] определяется полем объекта ν_i^0 :

$$d\nu_i^0 + \nu_i^0 \left(\omega_0^0 - \omega_i^i\right) + \omega_i^0 = \nu_{iK}^0 \omega_0^K . \tag{14}$$

Следуя работе [6], в случае голономного распределения Картана составим функции второго порядка:

$$Q_i^0 \overset{def}{=} -\frac{1}{m-1}\sum_{j\neq i} a_{ij}^j\ ,\ t_i \overset{def}{=} -\frac{1}{3}\Big[A_i - (m+2)Q_i^0\Big],$$

$$A_{kk}^i \overset{def}{=} \begin{cases} a_{kk}^i, \text{ при } i \neq k, \\ t_k, \quad \text{при } i = k; \end{cases} \quad \Phi_\alpha^i \overset{def}{=} A_{ss}^i a_\alpha^{ss}. \tag{15}$$

Каждая из функций Φ_α^i, Q_i^0 удовлетворяет уравнениям (12) и (14) соответственно. Функции 3-го порядка

$$Q_\alpha^0 \overset{def}{=} -\frac{1}{m}\Big\{\Phi_{\alpha s}^s - \Big[(m-1)Q_s^0 + a_{ss}^\beta \Phi_\beta^s\Big]\ \Phi_\alpha^s\Big\} \tag{16}$$

удовлетворяют уравнениям (13). Таким образом, справедливы

Теорема 4. *Поля квазитензоров* Φ_α^i, Q_i^0 *второго порядка определяют инвариантную нормализацию голономного распределения Картана.*

Теорема 5. *Поле геометрического объекта третьего порядка* $\left\{\Phi_\alpha^i, Q_\alpha^0\right\}$ *определяет инвариантное оснащение в смысле Э. Картана голономного распределения Картана* $\mathrm{M} \subset P_{2m}$.

Замечание. Теоремы 4 и 5 справедливы (с точностью до повышения дифференциальной окрестности на единицу) и на поверхности Картана.

В дифференциальных окрестностях 1-го и 2-го порядков возьмем охваты:

$$\Lambda_i \overset{def}{=} \Lambda_{i\beta}^\beta, \quad a_i \overset{def}{=} \sum_{j\neq i} a_{ij}^j, \quad b_i \overset{def}{=} \Lambda_i + a_i, \tag{17}$$

которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\Lambda_i + \Lambda_i\left(\omega_0^0 - \omega_i^i\right) - \Lambda_{ik}^\beta \omega_\beta^k - m\omega_i^0 = \Lambda_{iL}\omega_0^L, \tag{18}$$

$$da_i + a_i\left(\omega_0^0 - \omega_i^i\right) + \sum_{j\neq i}\Lambda_{ij}^\beta \omega_\beta^j - (m-1)\omega_i^0 = a_{iL}\omega_0^L, \tag{19}$$

$$db_i + b_i\left(\omega_0^0 - \omega_i^i\right) - \Lambda_{ii}^\beta \omega_\beta^i - (2m-1)\omega_i^0 = b_{iL}\omega_0^L. \tag{20}$$

Следующие охваты

$$A_\gamma^i \overset{def}{=} \sum_{j\neq i} a_\gamma^{jj} a_{jj}^i, \quad B_\gamma^i \overset{def}{=} a_\gamma^{ii} b_i, \quad C_\gamma^i \overset{def}{=} A_\gamma^i - B_\gamma^i, \tag{21}$$

относящиеся ко второй дифференциальной окрестности, удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dA_\gamma^i - A_\beta^i \omega_\gamma^\beta + A_\gamma^i \omega_i^i + \left(\delta_\gamma^\beta - a_\gamma^{ii} a_{ii}^\beta\right)\omega_\beta^i = A_{\gamma L}^i \omega_0^L, \tag{22}$$

$$dB_\gamma^i - B_\beta^i \omega_\gamma^\beta + B_\gamma^i \omega_i^i - (2m-1) a_\gamma^{ii} \omega_i^0 - a_\gamma^{ii} a_{ii}^\beta \omega_\beta^i = B_{\gamma L}^i \omega_0^L, \tag{23}$$

$$dC_\gamma^i - C_\beta^i \omega_\gamma^\beta + C_\gamma^i \omega_i^i + (2m-1) a_\gamma^{ii} \omega_i^0 + \omega_\gamma^i = C_{\gamma L}^i \omega_0^L. \tag{24}$$

Продолжим уравнения (11), имеем:

$$dA_i + A_i \omega_0^0 - A_i \omega_i^i + (m+2)\omega_i^0 - 3\Lambda_{si}^\beta \omega_\beta^s = A_{iL} \omega_0^L, \tag{25}$$

$$\begin{gathered} dA_\alpha + A_\alpha \omega_0^0 - A_\gamma \omega_\alpha^\gamma + (m-1)\omega_\alpha^0 - \\ - \left(A_s \delta_\alpha^\beta + 3\Lambda_{s\alpha}^\beta\right)\omega_\beta^s = A_{\alpha L} \omega_0^L. \end{gathered} \tag{26}$$

В силу уравнений (18), (20), (25) и соотношений (6) охват

$$H_i \overset{def}{=} \frac{1}{10m-4}\left(3\Lambda_i + A_i - 6b_i\right) \tag{27}$$

удовлетворяет уравнениям

$$dH_i + H_i\left(\omega_0^0 - \omega_i^i\right) + \omega_i^0 = H_{iL} \omega_0^L; \tag{28}$$

заметим, что поле квазитензора H_i определяет поле нормалей второго рода и относится ко второй дифференциальной окрестности элемента распределения Картана.

Согласно уравнениям (24), (28) поле квазитензора второго порядка

$$H_\gamma^i \overset{def}{=} C_\gamma^i - (2m-1) a_\gamma^{ii} H_i \tag{29}$$

на распределении Картана определяет поле нормалей первого рода, ибо

$$dH_{\gamma}^{i} + H_{\gamma}^{i}\omega_{i}^{i} - H_{\beta}^{i}\omega_{\gamma}^{\beta} + \omega_{\gamma}^{i} = H_{\gamma L}^{i}\omega_{0}^{L}. \tag{30}$$

Доказана

Теорема 6. *Поля квазитензоров* H_{α}^{i}, H_{i} (*см.* (*27*) *и* (*29*)) *во второй дифференциальной окрестности определяют внутреннюю инвариантную нормализацию распределения Картана*.

Обозначим

$$A_{s\alpha}^{\beta} \overset{def}{=} A_{s}\delta_{\alpha}^{\beta} + 3\Lambda_{s\alpha}^{\beta}; \tag{31}$$

имеем:

$$\begin{gathered} \delta A_{s\alpha}^{\beta} + A_{s\alpha}^{\beta}\pi_{0}^{0} - A_{s\alpha}^{\beta}\pi_{s}^{s} + A_{s\alpha}^{\gamma}\pi_{\gamma}^{\beta} - A_{s\gamma}^{\beta}\pi_{\alpha}^{\gamma} + \\ + \delta_{\alpha}^{\beta}(m-1)\pi_{s}^{0} - 3\left(\delta_{\alpha}^{\beta}\Lambda_{ts}^{\gamma} + \delta_{\alpha}^{\gamma}\Lambda_{st}^{\beta}\right)\pi_{\gamma}^{t} = 0. \end{gathered} \tag{32}$$

Возьмем охват

$$B_{s\alpha}^{\beta} \overset{def}{=} A_{s\alpha}^{\beta} + 3\left(\delta_{\alpha}^{\beta}\Lambda_{ts}^{\gamma} + \delta_{\alpha}^{\gamma}\Lambda_{st}^{\beta}\right)H_{\gamma}^{t}, \tag{33}$$

относящийся ко второй дифференциальной окрестности:

$$\delta B_{s\alpha}^{\beta} + B_{s\alpha}^{\beta}\pi_{0}^{0} - B_{s\alpha}^{\beta}\pi_{s}^{s} + B_{s\alpha}^{\gamma}\pi_{\gamma}^{\beta} - B_{s\gamma}^{\beta}\pi_{\alpha}^{\gamma} + \delta_{\alpha}^{\beta}(m-1)\pi_{s}^{0} = 0. \tag{34}$$

Охват

$$B_{\alpha} \overset{def}{=} \frac{1}{2(m-1)}\left[2A_{\alpha} + \left(A_{s\alpha}^{\beta} + B_{s\alpha}^{\beta}\right)H_{\beta}^{s}\right] \tag{35}$$

относится ко второй дифференциальной окрестности и удовлетворяет уравнениям:

$$\delta B_{\alpha} + B_{\alpha}\pi_{0}^{0} - B_{\gamma}\pi_{\alpha}^{\gamma} + H_{\alpha}^{s}\pi_{s}^{0} + \pi_{\alpha}^{0} = 0. \tag{36}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 7. *Поле геометрического объекта второго порядка* $\left\{H_{\alpha}^{i}, B_{\alpha}\right\}$ *определяет внутреннее инвариантное оснащение в смысле Э. Картана распределения Картана в* P_{2m}.

Замечание. Теоремы 6 и 7 не имеют места на поверхности Картана, ибо в охватах (17_1), (17_3), (21_2), (21_3), (31), (33), (35) существенным образом используются компоненты $\Lambda^{\beta}_{i\gamma}$, A_{α} геометрических объектов $\{\Lambda^{\beta}_{iL}\}$, $\{A_s, A_{\alpha}, \Lambda^{\beta}_{s\alpha}\}$ соответственно первого и второго порядков; на поверхности Картана поля функций $\Lambda^{\beta}_{i\gamma}$, A_{α} отсутствуют.

Список литературы

1. *Базылев В. Т.* О многомерных сетях и их преобразованиях // Итоги науки. Геометрия (1963) / ВИНИТИ. М., 1965. С. 138—164.

2. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

3. *Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.* Распределения *m*-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. 1971. Т. 3. С. 49—94.

4. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1975.

5. *Смирнов Р. В.* Преобразования Лапласа *p*-сопряженных систем // ДАН СССР. 1950. Т. 71. № 3. С. 437—439.

6. *Столяров А. В.* О внутренней геометрии поверхности Картана // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1976. Вып. 7. С. 111—118.

7. *Столяров А. В.* О геометрии сетей на распределениях *m*-мерных линейных элементов // Изв. вузов. Сер. Математика. 1976. № 2473—76 Деп.

8. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. М., 1948.

9. *Cartan E.* Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidiene on non euclidiene // Bull. Soc. Math. de France. 1919. № 47. P. 125—160; 1920. № 48. P. 132—208.

N. Kuzmina

PROJECTIVE DIFFERENTIAL GEOMETRY OF CARTAN'S DISTRIBUTION

Some questions of differential geometry of Cartan's distribution in the 2*m*—dimensional projective space are considered.