$$\Gamma^J_{KL}\Lambda^K\Lambda^L = \mu\Lambda^J .$$

Последнее означает, что кривая:

$$X^J = \Lambda^J t - \tfrac{1}{2}\Gamma^J_{KL}\Lambda^K\Lambda^L t^2 + \langle 3\rangle$$

является инфлексионной в точке P^0 кривой, соприкасающейся с некоторой геодезической связности Г.

Проводя рассуждения в обратном порядке и учитывая (5), получаем требуемый результат.

Библиографический список

1. Малаховский В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве // Тр. геометрич. семинара / ВИНИТИ. М.,1969. Т.2. С.179-206.

2. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Геометрия. 1963. Итоги науки и техники / ВИНИТИ. М.,1965. С.65-107.

3. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.

4. Андреев Б.А. Характеристические и гипохарактеристические направления отображения *f* // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1983. Вып.14. С.9-13.

5. Алешников И.С. Характеристические направления отображе-ния аффинного пространства в пространство гиперквадрик // Там же, 1995. Вып.26. С.5-8.

I.S.A l e s h n i k o v

AFFINE CONNECTIONS GENERATED BY THE MAPPING FROM THE AFFINE SPACE TO THE SPACE OF HYPERQUADRIC

The present work conciders a local differentiable mapping f of the affine space A_n to the space R(q) of hyperquadrics of the affine space A_m , where n=dimR(q). Two affine connections Ã and γ are introduced in the space A_n which are the generalization of known Vrănceanu′s connections of point mapping for the case of mapping f and their geometrics properties are investigated.

It is calculated the order of tangency of the image under the mapping f of a geodesic line of the connection Ã with the chain of hyperquadrics of the space R(q) which was introduced in the previous work. It is also calculated the order of tangency of the image under the mapping f of a geodesice line of the connection γ with the bunch of hyperquadrics of the space R(q) tangent to the mapping f.

Besides this, the symptom of the characteristic direction of the mapping f at the point P^0 is found.

УДК 514.75

СТРУКТУРЫ ТЕОРИИ ТОЧЕЧНЫХ СООТВЕТСТВИЙ В ГЕОМЕТРИИ ГИПЕРПОЛОС

Б. А. А н д р е е в

(Калининградский государственный университет)

В работе показано, что нормализованная регулярная гиперполоса в проективном пространстве P_n порождает семейство точечных соответствий расширенных аффинных пространств. Это приводит к появлению структур теории точечных соответствий [1], [2] в геометрии гиперполос, что позволило получить и охарактеризовать новые геометрические образы, присоединенные к гиперполосе, а также дать новые интерпретации известным. Доказан ряд теорем, связывающих, с одной стороны, касательные дробно-линейные отображения, в том числе локальную корреляцию Чеха, связность Г.Врэнчану с соприкасающимися гиперквадриками, чебышевским вектором и двойственными аффинными связностями на гиперполосе - с другой. Введены понятия характеристических направлений и главных точек гиперполосы и получена их геометрическая интерпретация.

Применяемые в работе индексы принимают следующие значения: $I,...=\overline{0,n}$; $i,...=\overline{1,m}$; $\alpha,...=\overline{m+1,n-1}$. Символ (a.b)[c] указывает на формулу (a.b) статьи [c].

§1. Отображение f^H. Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n, отнесенное к точечному подвижному реперу $R=\{A_I\}$; уравнения инфинитезимальных перемещений репера **R** и двойственного ему тангенциального репера $\{\tau^K\}$ имеют вид

$$dA_I=\omega_I^K A_K, \quad d\tau^K=-\omega_I^K\tau^I, \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа ω_I^K удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$d\omega_I^K=\omega_I^J\wedge\omega_J^K. \tag{1.2}$$

Поместим вершину A_o репера в произвольную точку **A** m-мерной поверхности $V\subset P_n$, являющуюся базисной поверхностью регулярной гиперполосы **H**, а гиперплоскость τ^n совместим с гиперплоскостью τ плоского элемента $(A,\tau)\in H$. В репере нулевого порядка R^o система дифференциальных уравнений гиперполосы **H** имеет вид [3,c.15]:

$$\omega_o^n=0, \tag{1.3}$$

$$\omega_o^\alpha=\Lambda_i^\alpha\omega_o^i, \tag{1.4}$$

$$\omega_\alpha^n=\Lambda_{\alpha i}\omega_o^i, \quad \omega_i^n=a_{ij}\omega_o^j, \tag{1.5}$$

причем уравнения (1.3), (1.4) определяют m-мерную поверхность **V**.

Задание гиперполосы **H** каждой точке $A \in V$ ставит в соответствие элемент τ пространства P_n^*, двойственного к P_n. Формы Пфаффа ω_i^n, ω_α^n, ω_o^n являются структурными формами пространства P_n^*, поэтому уравнения (1.3), (1.5) являются системой дифференциальных уравнений отображения

$$f^H : P \in V \text{ a } \quad \pi = f^H(P) \in P_n^*,$$

где **V** определяется системой (1.3), (1.4). Из (2.14)[3] получаем для каждой точки **A** : rang f^H=m.

В репере R^1 первого порядка [3,с.16] гиперполоса **H** задается уравнениями [3,с.18] :

$$\omega_o^n = 0, \ \ \omega_o^\alpha = 0, \ \ \omega_\alpha^n = 0; \tag{1.6}$$

$$\omega_i^n = a_{ij}\omega_o^j, \ \ \omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega_o^j, \ \ \omega_\alpha^j = \Lambda_{\alpha j}^i \omega^j. \tag{1.7}$$

Продолжение системы (1.6), (1.7) приводит к фундаментальному объекту $\Gamma_2 = \left\{a_{ij}, \Lambda_{ij}^\alpha, \Lambda_{\alpha j}^i, a_{ijk}, \Lambda_{ijk}^\alpha, \Lambda_{\alpha jk}^i\right\}$ второго порядка гиперполосы **H**. Отметим симметричность систем величин $\left\{a_{ij}\right\}$, $\left\{a_{ijk}\right\}$ по всем индексам.

Пусть $P \in V$ и $P = A_o + dA_o + \frac{1}{2}d^2 A_o + \langle 3 \rangle$, где символ $\langle r \rangle$ означает совокупность членов порядков малости $s \geq r$ относительно приращений главных параметров, и $\pi = f^H(P)$, $\pi = \tau^n + d\tau^n + \frac{1}{2}d^2\tau^n + \langle 3 \rangle$. Для

$$P = A_o + x^i A_i + x^\alpha A_\alpha + x^n A_n, \ \pi = \tau^n + y_i \tau^i + y_\alpha \tau^\alpha + y_o \tau^o \tag{1.8}$$

из (1.6), (1.7) получаем:

$$\begin{cases} y_i = -a_{ij}x^j - \frac{1}{2}a_{ijk}x^j x^k + \langle 3 \rangle, \\ y_\alpha = \frac{1}{2}a_{tj}\Lambda_{\alpha k}^t x^j x^k + \langle 3 \rangle, \quad y_0 = a_{ij}x^i x^j + \langle 3 \rangle. \end{cases} \tag{1.9}$$

2. Отображение f_A^H. Пусть гиперполоса **H** двойственно нормализована [3,с.21], а (n-m)-плоскость **N**(**A**) и (m-1)-плоскость (**A**) - соответственно ее нормали 1-го и 2-го рода в точке **A**. В частности, это могут быть определяемые внутренним инвариантным образом в третьей дифференциальной окрестности ее образующего элемента (A, τ) нормали (6.33)[3]. Если поместить вершину A_n репера R^1 на **N(A)**, а вершины A_i - на **(A)**, то в полученном репере R_N имеем для **N(A)** и **(A)** соответственно:

$$x^i = 0, \tag{2.1}$$

$$x^n = 0, \quad x^\alpha = 0, \quad x^o = 0. \tag{2.2}$$

Множество $V^* = \mathrm{Im} f^H$ является m-мерной поверхностью в P_n^*. Уравнения (1.9) можно рассматривать как ее параметрические уравнения. Очевидно, элементы пространства P_n^* вида $\pi = \tau^n + y_\alpha \tau^\alpha + y_o \tau^o$ (вида $\pi = y_i \tau^i$) образуют нормаль 1-го рода (2-го рода) поверхности V^* в элементе τ^n, которую мы будем обозначать символом $N^*(\tau)$ (символом). Из (2.1), (2.2) получаем:

$$\underset{\pi \in N^*(\tau)}{\mathrm{I}} \pi = \quad (A), \qquad \underset{\pi \in \quad (\tau)}{\mathrm{I}} \pi = N(A).$$

Пусть $A \in V$ и $T_m(A) \subset P_n$ - подпространство, касательное к поверхности **V** в точке **A**. Нормали **N(P)**, $P \in V$ устанавливают в некоторой окрестности $U \subset T_m(A)$ точки **A** диффеоморфизм

$$\varepsilon_A : M \in U \subset T_m(A)\ \mathrm{a}\ \ P = \varepsilon_A(M) \in V,$$

который определяется условием: пересечение $N(P) \cap T_m(A)$ состоит из точки $M = \varepsilon_A^{-1}(P)$. Двойственным образом определяется подпространство $T_m^*(\tau) \in P_n^*$ и диффеоморфизм

$$\varepsilon_\tau^* : \sigma \in U^* \subset T_m^*(\tau)\ \mathrm{a}\ \ \pi = \varepsilon_\tau^*(\sigma) \in V^*.$$

Таким образом, для каждой точки $A \in V$ нормализованная гиперполоса **H** определяет локальное дифференцируемое отображение

$$f_A^H = \left(\varepsilon_\tau^*\right)^{-1} \mathrm{o} f^H \mathrm{o} \varepsilon_A : T_m(A) \to T_m^*(\tau),$$

где τ определяется условием $(A,\tau) \in H$. Будем рассматривать m-плоскости $T_m(A)$ и $T_m^*(\tau)$, в которых заданы соответственно (m-1)-плоскости **(A)** и $^*(\tau)$ как расширенные аффинные пространства. Из проведенных рассуждений вытекает

Теорема 2.1. *Двойственно нормализованная регулярная гиперполоса **H** для каждого своего элемента* (A,τ) *порождает локальный диффеоморфизм* f_A^H *двух m-мерных расширенных пространств* $T_m(A)$ *и* $T_m^*(\tau)$.

Из (1.8), (1.9) в репере R_N для f_A^H получаем:

$$y_i = -a_{ij}x^j - \tfrac{1}{2} a_{ijk} x^j x^k + \langle 3 \rangle. \tag{2.3}$$

В дальнейшем, как и в (2.3), будем использовать неоднородные координаты, полагая, в соответствии с (1.8): $x^o = 1, y_n = 1$.

Гладкие отображения аффинных пространств являются объектом изучения теории точечных соответствий [1], [2], структуры которой, как вытекает из теоремы 2.1, оказываются связанными с геометрией гиперполосы **H**. Рассмотрим некоторые фундаментальные понятия этой теории в контексте изучения гиперполосы **H**.

3. Локальная корреляция Чеха. Рассмотрим связку корреляций $K(P_i): T_m(A) \to T_m^*(\tau)$, задаваемых формулами

$$y_i = \frac{-a_{ij}x^j}{1 - P_k x^k}, \tag{3.1}$$

касательных к отображению f_A^H в точке **A**. В случае точечного отображения **f** проективных пространств в связке касательных к нему в точке **P** коллинеаций выделяется локальная коллинеация Чеха $K(P_i^o)$ [4], [1], которая характеризуется тем, что функция $J(f)/J(K(P_i^o))$, где **J(f)** и $J(K(P_i^o))$ - якобианы указанных отображений, имеет в **P** стационарную точку. Пусть $\{a^{ij}\}$ - тензор, взаимный к $\{a_{ij}\}$. В нашем случае отображение $K(P_i^o)$ аналитически определяется соотношением

$$P_i^o = \frac{1}{m+1} a^{pq} a_{pqi} \tag{3.2}$$

и является корреляцией, которую мы будем называть локальной корреляцией Чеха. Из (3.1), (3.2) вытекает, что нормаль 2-го рода

$$x^\alpha = 0, \;\; x^n = 0, \;\; a^{pq} a_{pqi} x^i - (m+1) = 0 \tag{3.3}$$

является прообразом нормали $^*(\tau)$ при локальной корреляции Чеха. В дальнейшем при изучении геометрии гиперполосы **H** сохранены наименования объектов, принятые в [3].

Теорема 3.1. *Локальная корреляция отображения* f_A^H *определяется основным квазитензором* $\{t_i, a_{ij}\}$ *второго порядка гиперполосы.*

Доказательство. Из (6.11)[3] и (3.2) для $K(P_i^o)$ получаем

$$y_i = \frac{-a_{ij}x^j}{1 - \frac{m+1}{m+2} t_k x^k}.$$

Следствие. Утверждения, аналогичные доказанному, справедливы также для остальных основных квазитензоров 2-го порядка гиперполосы **H**.

Рассмотрим пучок соприкасающихся гиперквадрик (10.16)[3] гиперполосы **H**. Находя поляры всех точек нормали **N(A)** относительно этих гиперквадрик, убеждаемся в совпадении пересечений всех этих поляр с гиперплоскостью $T_m(A)$:

$$x^\alpha = 0, \;\; x^n = 0, \;\; t_i x^i = 1. \tag{3.4}$$

Теорема 3.2. *Нормали 2-го рода (3.3) и (3.4), порожденные соответственно локальной корреляцией Чеха и пучком соприкасающихся гиперквадрик, в* *общем случае параллельны друг другу и переводятся одна в другую гомотетией m-плоскости* $T_m(A)\setminus \quad (A)$ *с центром в* ***A*** *и коэффициентом* $\kappa = \frac{n+1}{n+2}$.

Теорема 3.3. *Если локальная корреляция Чеха отображения* f_A^H *является линейным отображением, то пересечение m-плоскости* $T_m(A)$ *с полярой любой точки нормали* ***N(A)*** *относительно элементов пучка соприкасающихся гиперквадрик совпадает с нормалью* ***(A)***.

Доказательство. Линейность отображения $K(P_i^o)$ означает : $P_i^o = 0$, что равносильно равенству $t_i = 0$. Справедливость теоремы теперь вытекает из (10.16)[3].

4. Характеристические направления. Понятие характеристических направлений [1] является одним из основных понятий теории точечных соответствий. Из теоремы 2.1 вытекает, что в геометрии регулярных гиперполос возникает обобщение этих направлений.

Пусть вектор $\Lambda = \{\Lambda^i\}$ ($\delta\Lambda^i = -\Lambda^j\pi_j^i$) задает в точке **A** направление, лежащее в плоскости $T_m(A)$. Геометрический объект 2-го порядка $\{a_{ij}, a_{ijk}\}$ в случае нормализованной гиперполосы **H** определяет для каждой точки **A** множество направлений, удовлетворяющих системе

$$a_{ijk}\Lambda^j\Lambda^k = 2\mu a_{ij}\Lambda^j. \tag{4.1}$$

Эти направления можно задать также уравнениями

$$\Phi_{pq} \equiv a_{i[p}a_{q]jk}\Lambda^i\Lambda^j\Lambda^k = 0 \tag{4.2}$$

как направления общих образующих системы кубических конусов $\Lambda^{ij}\Phi_{ij} = 0$.

Определение 4.1. Лежащее в m-плоскости $T_m(A)$ направление, определяемое в точке **A** вектором Λ и удовлетворяющее системе (4.2), называется характеристическим направлением нормализованной регулярной гиперполосы **H**.

Из систем (4.1) и (4.2) следует, что в общем случае в каждой точке **A** имеется $2^m - 1$ характеристическое направление. Прямые связки **{A}**, имеющие в точке **A** характеристические направления, называются характеристическими прямыми гиперполосы **H**.

Теорема 4.1. *Направление, задаваемое в точке* ***A*** *вектором* Λ, *является характеристическим направлением гиперполосы* ***H*** *в том и только в том случае, если для любой кривой* $l: R \to T_m(A)$, *определяющей в точке* ***A*** *это направление и имеющей в* ***A*** *инфлексионную точку, кривая* $f_A^H \circ l: R \to T_m^*(\tau)$ *также имеет в* τ *инфлексионную точку.*

Доказательство вытекает из формул (1.13)[1], (4.1) и (2.3).

5. Главные точки. При изучении отображений в аффинное или нормализованное проективное пространство весьма полезным оказалось понятие главных точек [5], [6] отображения и связанное с ним понятие индикатрисы отображения. Следующие два определения обобщают их для геометрии нормализованной регулярной гиперполосы **H**.

Определение 5.1. Точка $P \in T_m(A)$ называется главной точкой гиперполосы **H** относительно точки **A**, если существует касательная к отображению f_A^H корреляция $K(P_i)$, такая, что: 1) прямая [**AP**] является $K(P_i)$-главной [1], 2) $K(P_i)(P) \in$.

Множество главных точек относительно точки **A** обозначим символом $_A$.

Определение 5.2. Определяемое для каждой точки **A** объектом $\{a_{ij}, a_{ijk}\}$ инвариантное алгебраическое многообразие I_A:

$$a_{ijk}x^j x^k - 2a_{ij}x^j = 0, \quad x^\alpha = 0, \quad x^n = 0, \qquad (5.1)$$

называется индикатрисой гиперполосы **H** в точке **A**.

Очевидно : $A \in I_A$. В общем случае индикатриса I_A является алгебраическим многообразием размерности 0 и порядка 2^m. Из предложения 1 работы [5] вытекает

Теорема 5.1. *Множество главных точек относительно **A** состоит из точек индикатрисы* I_A*, отличных от **A**:*

$$_A = I_A \setminus \{A\}. \qquad (5.2)$$

Следствие 1. *На каждой характеристической в точке **A** прямой имеется единственная главная точка (относительно точки **A**).*

Следствие 2. *Каждая характеристическая в точке **A** прямая гиперполосы **H** имеет вид [**AP**], где* $P \in \ _A$.

6. Обобщение связности Г.Врэнчану. Поля нормалей 1-го и 2-го рода порождают на поверхности **V** аффинную связность ν с формами связности

$$\Omega^i = \omega_o^i, \quad \Omega_i^j = \omega_i^j - \delta_i^j \omega_o^o. \qquad (6.1)$$

Объект связности Г.Врэнчану [7], [1], присоединенный к точечному соответствию, в случае отображения f_A^H имеет вид

$$\Gamma_{jk}^i = a^{it}a_{tjk}, \quad \nabla\Gamma_{jk}^i = -\Gamma_{jk}^i\omega_o^o + \Gamma_{jkl}^i\omega_o^l. \qquad (6.2)$$

Действительно, из (1.10) и (6.2) вытекают соотношения (5.2)[1], определяющие объект связности Г.Врэнчану. В нашем случае объект(6.2) задает на нормализованной поверхности **V** аффинную связность Γ, определяемую формами

$$\tilde{\Omega}^i = \omega_o^i, \quad \tilde{\Omega}_i^j = \Omega_i^j + \Gamma_{ik}^j \omega_o^k, \qquad (6.3)$$

которые, в чем легко убедиться, как и формы (6.1), удовлетворяют известным уравнениям пространства аффинной связности. Таким образом, связность **Г** является обобщением связности Г.Врэнчану точечного соответствия для нормализованной гиперполосы **Н**.

В теории регулярных гиперполос известны двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ [8,с.40]. Определяющие их формы связности имеют вид (21) и (22) [8], которые в репере R_N принимают соответственно вид (6.1) и (6.3). Отсюда вытекает, что связность $\overset{1}{\nabla}$ тождественна связности ν, и

Теорема 6.1. *Обобщающая связность Г.Врэнчану точечного соответствия связность **Г** совпадает с аффинной связностью* $\overset{2}{\nabla}$ *регулярной гиперполосы **Н**, и таким образом, **Г** двойственна связности* ν.

Следствие. *Связности **Г** и* ν *сопряжены относительно главного фундаментального тензора гиперполосы.*

Теорема 6.2. *Пара связностей* (Γ, ν) *является чебышевской [9,с.181] в том и только в том случае, если в каждой точке* $A \in V$ *локальная корреляция Чеха* $K\left(P_i^o\right)$ *является линейным отображением.*

Доказательство. Оба условия определяются равенством $t_i = 0$.

Теорема 6.3. *Пара связностей* (Γ, ν) *определяет характеристические направления гиперполосы **Н**.*

Доказательство. Система (4.2) равносильна системе

$$\Phi^{pq} \equiv \Gamma_{ij}^{[p} \Lambda^{q]} \Lambda^i \Lambda^j = 0. \tag{6.4}$$

Библиографический список

1. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Геометрия. 1963. Итоги науки / ВИНИТИ. М., 1965. С. 65-107.
2. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Алгебра, топология, геометрия. 1970. Итоги науки / ВИНИТИ. М., 1971. С. 153-174.
3. Попов Ю.И. Общая теория регулярных гиперполос / Калинингр. ун-т. Калининград, 1983. 82 с.
4. Чех Э. Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами.1 // Чехосл. мат. журн. 1952. V. 2. № 1. P. 91-107.
5. Андреев Б.А. О распределении линейных элементов, порожденных отображением $f: P_m \to A_n$ **(m>n)** // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1979. Вып. 10. С.5-9.

6. Андреев Б.А. К геометрии дифференцируемого отображения $f\colon P_m \to \hat{P}_n \left(m \geq n\right)$ // Там же, 1987. Вып. 18. С. 5-9.

7. Vranceanu G. Sul tensore associato ad una corrispondenza fra spazi proettivi // Boll. Unione mat. ital. 1957. 12. № 4. P. 489-506.

8. Столяров А.В. Дифференциальная геометрия полос // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978, Т. 10. С. 25-54.

9. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.

B.A.A n d r e e v

STRUKTURES OF THE THEORY OF POINT CORRESPONDENCES IN THE GEOMETRY OF HYPERSTRIPS

The author states and solves the problem of the application of the theory of point correspondences (T.P.C.) in the projective geometry of hyperstrips. Principal notions of T.P.C., such as the bundle of tangent collineations, the local collineation of Čech, characteristic directions, $K(P_\alpha)$ - principal lines, prinsipal points, the Vrănceanu′s connection are applied and generalized to the study of dual-normalized hyperstrip H in the n-dimensional projective space P_n .

Let V be a smooth surface in P_n , where $m=\dim V\leq n-2$, and P_n^* is a dual space to P_n . We consider the hyperstrip H as a graph of the immersion
$f^H\colon\ P \in V \mapsto \pi \in P_n^*$, where P is incident to π.

Using the immersion f^H a local diffeomorfism f_A^H of projective-affine spaces which are tangent to V and $V^* = J^m f^H$ respectively at A and $f^H(A)$ is constructed for each point $A\in V$. The mapping f_A^H is an object of study of T.P.C., which leads to the appearance of its structures in the geometry of hyperstrips. Consepts of characteristic directions and principal points are introduced and their geometric interpretation is obtained; it is proved that the set of principal points constructed for the point A determines the set of characteristic directions at it.

A number of theorems are proved which demonstrate links between the local correlation of Čech, belonging to the bundle of correlations, tangent to f_A^H and such notions of the theory of hyperstrips as a bundle of osculating hyperquadrics, Chebyshev′s vector, dual affine connections $\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla}$ of a hyperstrip. Affine connection Ã is constructed on the surface V which generalizes Vranceanu′s connection and it is proved that Ã coincides with the connection $\overset{2}{\nabla}$. It is also proved that the set of characteristic directions is determined by the pair of connections $\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla}$.