

УДК 514.75

**М. А. Чешкова**

(Алтайский государственный университет,  
г. Барнаул)

### О ЛИСТЕ МЁБИУСА В $E^4$

В евклидовом пространстве  $E^4$  изучается лист Мёбиуса. В процессе исследования используется система компьютерной математики MAPLE.

В евклидовом пространстве  $E^4$  рассмотрим линейчатую поверхность [1, с. 140]  $M$  :

$$r(u, v) = e(v) + ul(v), \quad (1)$$

где  $e(v) = (\cos(v), \sin(v), 0, 0)$  — направляющая окружность,  $l(v)$  — орт образующей прямой. Будем предполагать, что прямые ортогонально пересекают окружность.

Обозначим через  $\varphi(v)$  угол между плоскостью окружности и прямой. Тогда  $l(v) = \cos(\varphi)e(v) + \sin(\varphi)a(v)$ , где  $a(v)$  — орт проекции вектора  $l(v)$  на 2-плоскость, дополнительную к 2-плоскости окружности. Полагаем

$$a(v) = (0, 0, \cos(v), \sin(v)).$$

Если при этом  $\varphi = kv/2, k$  — целое число, то  $l(0) = (-1)^k l(2\pi)$ , прямые  $r(u, 0), r(u, 2\pi)$  — «склеиваются». Имеем аналог листа Мёбиуса [2], перекрученного  $k$  раз.

Итак,

$$\begin{aligned} l(v) &= \cos(kv/2)e(v) + \sin(kv/2)a(v), \\ r(u, v) &= (1 + u \cos(kv/2))e(v) + u \sin(kv/2)a(v), \end{aligned} \quad (2)$$

или

$$r(u, v) = ((1 + u \cos(kv/2)) \cos(v), (1 + u \cos(kv/2)) \sin(v), u \sin(kv/2) \cos(v), u \sin(kv/2) \sin(v)). \quad (3)$$

Исследуем эту поверхность. Наряду с ортобазисом

$$e(v) = (\cos(v), \sin(v), 0, 0), e'(v) = (-\sin(v), \cos(v), 0, 0),$$

$$a(v) = (0, 0, \cos(v), \sin(v)), a'(v) = (0, 0, -\sin(v), \cos(v))$$

рассмотрим ортобазис

$$m_1(v) = \cos(kv/2)e(v) + \sin(kv/2)a(v),$$

$$m_2 = -\sin(kv/2)e(v) + \cos(kv/2)a(v),$$

$$m_3 = \cos(kv/2)e'(v) + \sin(kv/2)a'(v),$$

$$m_4 = -\sin(kv/2)e'(v) + \cos(kv/2)a'(v).$$

Имеем

$$r_1(u, v) = r_u(u, v) = l(v) = m_1(v), l'(v) = \frac{k}{2}m_2(v) + m_3(v),$$

$$r_2(u, v) = r_v(u, v) = e'(v) + ul'(v) = \frac{ku}{2}m_2(v) + (\cos(kv/2) + u)m_3 - \sin(kv/2)m_4(v).$$

Выполняются соотношения

$$e(v) = \cos(kv/2)m_1(v) - \sin(kv/2)m_2(v),$$

$$a(v) = \cos(kv/2)m_2(v) + \sin(kv/2)m_1(v),$$

$$e'(v) = \cos(kv/2)m_3(v) - \sin(kv/2)m_4(v),$$

$$a'(v) = \sin(kv/2)m_3(v) + \cos(kv/2)m_4(v).$$

Определим метрический тензор  $g_{ij} = (r_i, r_j)$  поверхности:

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = \frac{k^2 + 4}{4}u^2 + 2u \cos(kv/2) + 1, \quad (4)$$

$$g = \det(g_{ij}) = \frac{k^2 + 4}{4}u^2 + 2u \cos(kv/2) + 1$$

**Теорема 1.** *Скалярная кривизна  $K$  листа Мёбиуса  $M \subset E^4$  равна*

$$K = -\frac{k^2 + 4b^2}{2g^2}, \quad b = \sin(kv/2). \quad (5)$$

Символы Кристоффеля [3, с. 156] определим из формулы

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks} (\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}), \quad g_{is} g^{sj} = \delta_i^j,$$

где  $\delta_i^j$  — символ Кронекера. Ненулевые символы  $\Gamma_{ij}^k$  равны

$$\Gamma_{12}^1 = -\cos(kv/2) - \frac{(k^2 + 4)u}{4}, \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{2ku \sin(kv/2)}{4g},$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{4\cos(kv/2) + (k^2 + 4)u}{4g}.$$

Скалярная кривизна  $K$  поверхности равна  $K = g^{ij} R_{ij}$  [3, с. 269; 5, с. 37], где  $R_{ij} = R_{isj}^s$  — тензор Риччи [5, с. 37],

$$R_{jkl}^i = \partial_k \Gamma_{lj}^i - \partial_l \Gamma_{kj}^i + \Gamma_{lj}^m \Gamma_{km}^i - \Gamma_{kj}^m \Gamma_{lm}^i$$

тензор кривизны [3, с. 142; 5, с. 27],  $i, j = 1, 2, \partial_1 = \partial_u, \partial_2 = \partial_v$ .

Тензор Риччи равен

$$R_{11} = \frac{-(k^2 + 4) + 4\cos^2(kv/2)}{4g^2}, \quad R_{22} = \frac{-(k^2 + 4) + 4\cos^2(kv/2)}{4g},$$

$$R_{12} = R_{21} = 0.$$

Так как  $g^{11} = 1, g^{12} = g^{21} = 0, g^{22} = 1/g$ , то

$$K = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = -(k^2 + 4b^2)/2g^2, \quad b = \sin(kv/2).$$

**Следствие 1.** *Скалярная кривизна листа Мёбиуса отрицательная.*

**Следствие 2.** Скалярная кривизна листа Мёбиуса ограничена.  
*Доказательство.* Рассмотрим функцию скалярной кривизны  $K = K(u, v, k)$  (рис. 1, 2). Имеем четыре точки экстремума:

$$M_1(0, \pi/k), M_2(0, -\pi/k), M_3(4/(k^2 + 4), 2\pi/k),$$

$$M_4 = (-4/(k^2 + 4), 0).$$

**$K=K(u,v,1)$**

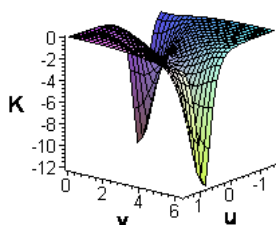


Рис. 1

**$K=K(u,v,2)$ (white),  $K=K(u,v,1)$**

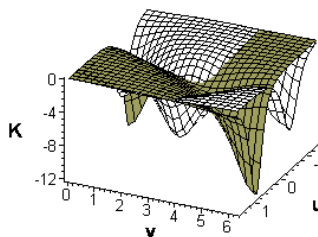


Рис. 2

Значения кривизны равны

$$K(4/(k^2 + 4), 2\pi, k) = K(-4/(k^2 + 4), 0, k) = -\frac{(k^2 + 4)^2}{2k^2},$$

$$K(0, \pi/k, k) = K(0, -\pi/k, k) = -\frac{k^2}{2} - 1.$$

Таким образом,  $K \in [-(k^2 + 4)^2 / 2k^2, 0)$ .

Исследуем, как меняется скалярная кривизна листа Мёбиуса при изменении  $k$ . Для этого рассмотрим график (рис. 3) функции  $f(u, v) = K(u, v, 2) - K(u, v, 1)$ . Точки, криволинейные координаты  $(u, v)$  которых удовлетворяют уравнению  $f(u, v) = 0$ , имеют на обоих листах Мёбиуса равные скалярные кривизны. Из графика (рис. 4) видно, что они заполняют две кривые.

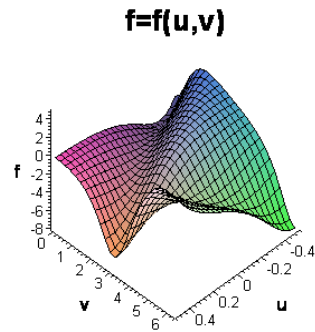


Рис. 3

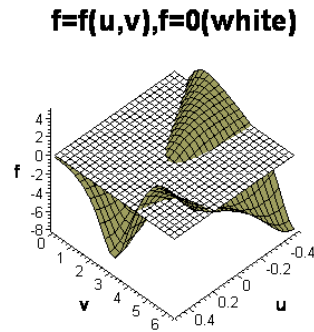


Рис. 4

Рассмотрим два ортогональных единичных нормальных вектора

$$n_1 = \frac{1}{A}((\cos(kv/2) + u)m_2 - \frac{ku}{2}m_3),$$

$$n_2 = \frac{1}{A\sqrt{g}}(\sin(kv/2)(\cos(kv/2) + u)m_3 + \sin(kv/2)\frac{ku}{2}m_2 + A^2m_4), \quad (6)$$

где

$$(\cos(kv/2) + u)^2 + \frac{(ku)^2}{4} = g - \sin^2(kv/2) = A^2, \quad (7)$$

и формулы Гаусса — Вейнгартена [4, с. 23]

$$r_{ij} = \Gamma_{ij}^s r_s + \alpha_{ij}^s n_s, \quad (i, j, s = 1, 2).$$

Используя

$$r_1 = m_1(v), r_2 = \frac{ku}{2}m_2(v) + (\cos(kv/2) + u)m_3(v) - \sin(kv/2)m_4,$$

$$m_1'(v) = \frac{k}{2}m_2(v) + m_3(v), m_2'(v) = -\frac{k}{2}m_1(v) + m_4(v),$$

$$m_3'(v) = \frac{k}{2}m_4(v) + m_1(v), m_4'(v) = -\frac{k}{2}m_3 + m_2(v),$$

находим

$$r_{11} = 0, r_{12} = r_{21} = \frac{k}{2}m_2 + m_3,$$

$$r_{22} = -(\cos(kv/2) + \frac{(k^2 + 4)u}{4})m_1 + \sin(kv/2)m_2 + kum_4.$$

В силу (6) и равенств  $\alpha_{ij}^s \langle n_s, n_p \rangle = \langle r_{ij}, n_p \rangle$ , имеем

$$\alpha_{11}^1 = \alpha_{11}^2 = 0, \alpha_{12}^1 = \alpha_{21}^1 = \frac{k}{2A} \cos(kv/2), \alpha_{12}^2 = \alpha_{21}^2 =$$

$$= \frac{1}{A\sqrt{g}} \sin(kv/2) (\cos(kv/2) + \frac{(k^2 + 4)u}{4}), \quad (9)$$

$$\alpha_{22}^1 = \frac{1}{A} \sin(kv/2) (\cos(kv/2) + u), \alpha_{22}^2 = \frac{ku(g + A^2)}{2A\sqrt{g}}.$$

Пусть  $t = t^i r_i \in T_p M$  ( $p \in M$ ) — касательный вектор, длина которого равна единице. Рассмотрим вектор нормальной кривизны

$$\alpha(t, t) = \alpha_{ij}^s t^i t^j n_s. \quad (10)$$

Зафиксируем точку  $p$ , а вектор  $t$  будем менять. Тогда концы вектора нормальной кривизны с началом в точке  $p$  опишут в  $T_p^\perp(M)$  кривую, называемую индикатрисой нормальной кривизны. Определим ее.

Обозначим через  $w^1, w^2$  координаты точки индикатрисы в базисе  $\{p, n_1, n_2\}$ . Имеем

$$w^1 = \alpha_{ij}^1 t^i t^j, w^2 = \alpha_{ij}^2 t^i t^j. \quad (11)$$

Так как  $t$  орт, то координаты его равны

$$t = (\cos(\gamma), \frac{\sin(\gamma)}{\sqrt{g}}). \quad (12)$$

Используя (11), (12) и равенства  $\alpha_{11}^1 = \alpha_{11}^2 = 0$ , получим параметрические уравнения индикатрисы, где параметром является  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} w^1 - \frac{1}{2g} \alpha_{12}^1 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \alpha_{12}^1 \sin(2\gamma) - \frac{1}{2g} \alpha_{22}^1 \cos(2\gamma), \\ w^2 - \frac{1}{2g} \alpha_{22}^2 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \alpha_{12}^2 \sin(2\gamma) - \frac{1}{2g} \alpha_{22}^2 \cos(2\gamma). \end{aligned} \quad (13)$$

Это уравнения эллипса или отрезка прямой.

Исследуем индикатрису нормальной кривизны в точках направляющей окружности  $S^1: r = r(0, v)$ ,  $v \in [0, \pi/k]$ .

**Теорема 2.** *Индикатриса нормальной кривизны в точках окружности  $S^1$  есть эллипс*

$$w^1 - \frac{b}{2} = \frac{k}{2} \sin(2\gamma) - \frac{b}{2} \cos(2\gamma), \quad w^2 = b \sin(2\gamma), \quad b = \sin(kv/2), \quad (14)$$

либо отрезок прямой  $N_1 = (p, n_1)$ ,  $p(0,0)$ .

*Доказательство.* В (4), (7), (9) полагаем  $u = 0$ . Имеем

$$\begin{aligned} g &= 1, \quad A = \cos(kv/2), \quad \alpha_{11}^1 = 0, \quad \alpha_{12}^1 = \alpha_{21}^1 = \frac{k}{2}, \\ \alpha_{22}^1 &= \sin(kv/2), \quad \alpha_{11}^2 = 0, \quad \alpha_{12}^2 = \alpha_{21}^2 = \sin(kv/2), \quad \alpha_{22}^2 = 0. \end{aligned}$$

Полагая  $b = \sin(kv/2)$  и подставляя в (13), получим уравнения индикатрисы.

Если  $\sin(v/2) = 0$ , что соответствует точке  $r(0, 0)$ , то имеем  $w^2 = 0$ , т.е. отрезок прямой  $N_1 = (p, n_1)$ .

На рисунках 5—8 видно, как меняется эллипс (14) при приближении к точке  $r(0,0)$  и при закручивании.

Исследуем индикатрису нормальной кривизны вдоль прямой  $L: r = r(u, 0)$ .

**b=1,k=1(black); b=1,k=2**

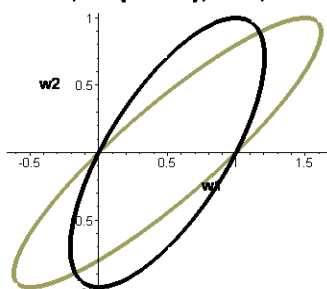


Рис. 5

**b=1/5,k=1(black); b=1/5,k=2**

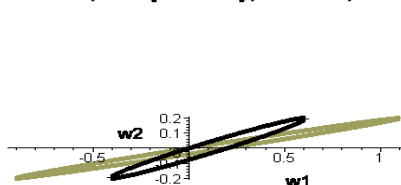


Рис. 6

**b=1/2,k=1(black); b=1/2,k=2**

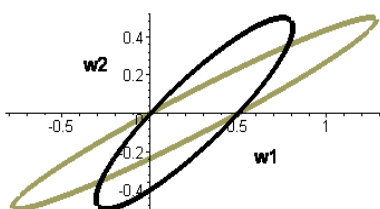


Рис. 7

**b=1/10,k=1(black) b=1/10,k=2**

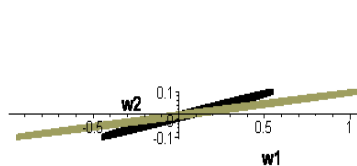


Рис. 8

**Теорема 3.** Индикатриса нормальной кривизны в точках прямой  $L$  либо эллипс

$$w^1 = \frac{k}{2g} \sin(2\gamma), w^2 - \frac{ku}{2g} = \frac{u}{2g} \cos(2\gamma), \quad (15)$$

$$g = (1+u)^2 + (uk/2)^2,$$

либо отрезок прямой  $N_1 = (p, n_1), p(0,0)$ .

*Доказательство.* В (4), (7), (9) полагаем  $\nu = 0$ . Имеем

$$\sqrt{g} = A, \alpha_{11}^1 = 0, \alpha_{12}^1 = \alpha_{21}^1 = \frac{k}{2g}, \alpha_{22}^1 = 0,$$

$$\alpha_{11}^2 = 0, \alpha_{12}^2 = \alpha_{21}^2 = 0, \alpha_{22}^2 = ku.$$



Дифференциальная геометрия многообразий фигур

Уравнения индикатрисы примут вид (15). В точке  $u = 0, v = 0$  имеем  $w^2 = 0, g = 1$ . Индикатриса вырождается в отрезок прямой  $N_1$ . На рисунках 9—12 видно, как меняется эллипс (15) при приближении к точке  $r(0, 0)$  и при закручивании.

**$u=5, k=1$ (black);  $u=5, k=2$      $u=1/5, k=1$ (black);  $u=1/5, k=2$**

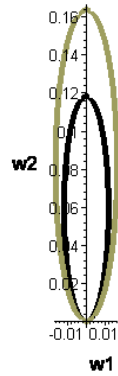


Рис. 9

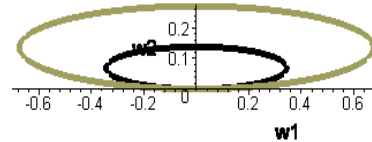


Рис. 10

**$u=1, k=1$ (black);  $u=1, k=2$**

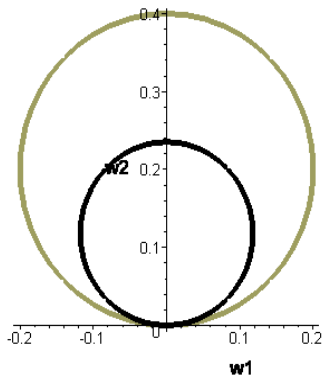


Рис. 11

**$u=1/10, k=1$ (black);  $u=1/10, k=2$**

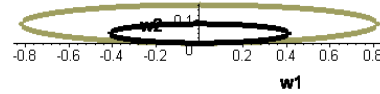


Рис. 12

**Список литературы**

1. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. М., 1969.
2. *Чешкова М. А.* О листе Мёбиуса // Вестник БГПУ: Естественные науки. Барнаул, 2006. С. 83—86.
3. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. 1.
4. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. 2.
5. *Yano K., Kon M.* Structures on manifolds. Singapore: World Scientific, 1984.

M. Cheshkova

ON A MOBIUS BAND IN  $E^4$

The Mobius band in Euclidean space is studied. In the process of study system computer mathematics MAPLE is used.

УДК 514.75

***Ю. И. Шевченко***

*(Российский государственный университет им. И. Канта,  
г. Калининград)*

**НОРМАЛЬНАЯ АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ СТОЛЯРОВА,  
АССОЦИИРОВАННАЯ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ  
ПЛОСКОСТЕЙ**

В проективном пространстве рассматривается распределение плоскостей. Над проективным пространством возникает ассоциированное с распределением обобщенное расслоение нормальных аффинных реперов. В этом расслоении задана аффинная связность А. В. Столярова с помощью объекта связности, состоящего из тензора связности и объекта обычной нормальной линейной связности. Получены выражения объектов кручения и кривизны нормальной аффинной связ-