$$\frac{dK}{ds} = m\lambda^2 k'(s)\beta(s) + [\omega, K].$$

Из последнего соотношения с учетом 1-го равенства системы (5), получаем

$$[e,u]=m\lambda^2 k'(s)\beta(s).$$

Так как e=τ, [τ,ν]=β, то u= $m\lambda^2 k'(s)\nu(s)$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Амишева Н.В.* Интегрируемость геодезического потока развертывающейся поверхности // Тез. докл. междунар. геом. семинара им. Н.И. Лобаческого «Совр. геом. и теор. физ. полей». Казань, 1997.

2. *Амишева Н.В.* Поток, определяемый развертывающейся поверхностью // Тез. докл. V Междунар. конф. женщин-математиков «Математика. Экономика» Ростов н/Д., 1997.

3. *Фоменко А.Т.* Дифференциальная геометрия и топология. Допол. главы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.

4. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. Ижевск: Факториал; Просперус, 1995.

5. *Фоменко А.Т.* Симплектическая геометрия. Методы и приложения М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

6. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. М., 1956.

N.V.Amisheva

ON STREAMS DEFINED BY EVOLVED SURFACE

In neighbourhood of investigated point stream can be considered as family of trajectories r=r(t,α), dependent on parameter α. With α=0 real trajectory r=(t,0)=r(t) is distinguished. Therefore the equation r(t, α)=ρ(t)+ α ρ′(t), defining evolved surface in three dimentional space, gives some stream. Geodesic stream, arising on cotangent bundle of the surface, is investigated.

УДК 514.75

О НОРМАЛИЗАЦИИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Б.А. А н д р е е в

(Калининградский государственный университет)

Структуры теории точечных отображений обобщаются и применяются для изучения нормализованного проективного пространства P_n. Найдены и геометрически охарактеризованы порожденные нормализацией геометрические образы

и числовые инварианты. Доказаны предложения, в которых изучаются свойства определяемых нормализацией трех аффинных связностей.

1. Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n, отнесенное к подвижному реперу $r=\{\vec{r}_I\}$ $(I,...=\overline{0,n})$, деривационные формулы которого имеют вид

$$d\vec{r}_I = \omega_I^K \vec{r}_K, \qquad (1.1)$$

где формы ω_I^K подчиняются уравнениям структуры проективного пространства. В [1] нормализованное пространство $N(P_n)$ задается дифференцируемым соответствием $\varphi: p \in P_n \to \varphi(p) \in R(\Pi)$, где $R(\Pi)$ - пространство гиперплоскостей $\Pi \subset P_n$, т.е. двойственное к P_n пространство P_n^*. Так как P_n^* - проективное пространство, отображение φ является примером изучения теории точечных соответствий [2], [3]. Поместив вершину r_0 репера в произвольную точку p области определения отображения φ, а вершины r_i $(i,...=\overline{1,n})$ - на гиперплоскость $\Pi = \varphi(p)$, получим систему дифференциальных уравнений отображения φ в виде:

$$-\omega_i^0 = \Lambda_{ij}\omega_0^j. \qquad (1.2)$$

Осуществляя 2-кратное продолжение системы (1.2), приходим к уравнениям

$$\nabla\Lambda_{ij} = \Lambda_{ijk}\omega_0^k, \ \nabla\Lambda_{ijk} = \Lambda_{ijkl}\omega_0^l, \qquad (1.3)$$

где ∇- оператор, определенный в [4, с.29]. Пусть p^*- точка из окрестности точки $p=r_0$, $\Pi^* = \varphi(p^*)$, а x^i, ξ_i их неоднородные координаты соответственно в репере r и двойственном ему тангенциальном репере. Тогда ряд Тейлора отображения φ имеет вид:

$$\xi_i = \Lambda_{ij}x^j + \frac{1}{2}\Lambda_{ijk}x^j x^k + <3>. \qquad (1.4)$$

2. Локальная корреляция Чеха нормализации N. В связке корреляций $K(P_i)$:

$$\xi_i = \frac{\Lambda_{ij}x^j}{1-P_k x^k}, \qquad (2.1)$$

касательных к φ в p условие $P_k=0$ выделяет корреляцию K_0, которая характеризуется свойством : $K_0(p)=\Pi$. Кроме K_0 в связке $K(P_i)$ выделяется корреляция Чеха K_c [7], [2], определяемая условием: якобиан функции $K_c^{-1} \circ \varphi$ имеет в p стационарную точку. Рассмотрим геометрический объект

$$V_{ij}^k = V^{kt}\Lambda_{tij}, \qquad (2.2)$$

где $\{V^{kt}\}$ - тензор, взаимный к $\{\Lambda_{ij}\}$: $V^{kt}\Lambda_{ti} = \delta_i^k$. Пусть $V_{ti}^t = V_i$;тогда справедливо

Предложение 2.1. Локальная корреляция Чеха определяется условием: $P_i=\frac{1}{n+1}V_i$.

Гиперплоскость $K_c(p)$ будем называть гиперплоскостью Чеха нормализации N. Таким образом возникает еще одно отображение $P_n \to P_n^*$.

3. Характеристические направления нормализации. Рассмотрим вектор $\Lambda=\{\Lambda^i\}$ ($\delta\Lambda^i= - \Lambda^j \pi^i_j$), который задает в точке p некоторое направление. Фундаментальный объект $\{\Lambda_{ij}, \Lambda_{ijk}\}$2-го порядка нормализации N определяет для каждой точки p множество направлений, удовлетворяющих системе

$$\Lambda_{ij}\Lambda^i\Lambda^j=2\mu\Lambda_{ij}\Lambda^j. \quad (3.1)$$

Определение 3.1. Направление, определяемое в точке p вектором Λ и удовлетворяющее системе (3.1), называется характеристическим направлением нормализации, а задаваемая этим направлением прямая - характеристической прямой нормализации.

Из (3.1) следует, что в общем случае в каждой точке нормализованного проективного пространства имеется $m=2^n-1$ характеристических направлений.

Предложение 3.1. Направление, задаваемое в точке p вектором Λ, является характеристическим направлением нормализации N в том и только в том случае, если для любой кривой $l:R\to P_n$, определяющей в p это направление и имеющей в p инфлексионную точку, кривая $\varphi o l$ также имеет в $\varphi(p)$ инфлексионную точку.

Доказательство вытекает из формул (1.13) [2], (3.1) и (1.4).

4. Главные точки нормализации. Индикатриса нормализации.

Определение 4.1. Точка $q\in P_n$ называется главной точкой нормализации (относительно точки p), если существует касательная к φ в p корреляция $K(P_i)$, такая, что прямая [p,q] является $K(P_i)$ - главной [2]; 2) $K(P_i)(p) \in\varphi(p)$.

Множество главных относительно p точек обозначим M_p.

Определение 4.2. Определяемое для каждой точки p объектом $\{\Lambda_{ij}, \Lambda_{ijk}\}$ алгебраическое многообразие I_p:

$$\Lambda_{ijk}X^jX^k-2\Lambda_{ij}X^j=0 \quad (4.1)$$

называется индикатрисой нормализации N в точке p.

Из предложения 1 работы [6] вытекает

Предложение 4.1. Индикатриса I_p характеризуется соотношением

$$M_p=I_p\setminus\{p\} . \quad (4.2)$$

Следствие 1. На каждой характеристической в точке p прямой имеется единственная главная (относительно p) точка.

Следствие 2. Каждая характеристическая в p прямая нормализации N имеет вид [p,q], где $q\in M_p$.

5. Числовые инварианты нормализации. Пусть Λ - характеристическое направление в точке p и L - соответствующая характеристическая прямая. Рассмотрим сложное отношение X(L)=(p,q,a,b) где $q\in M_p$, причем $\{a\}=L\cap\varphi(p)$, а $\{b\}= L\cap K_c(p)$. Так как X(L) не меняется при проективных преобразованиях, в общем случае в каждой точке p во 2-й дифференциальной окрестности мы определили $m=2^n-1$ числовых инвариантов нормализации, а тем самым m числовых функций на $N(P_n)$.

6. Аффинные связности, порожденные нормализацией. Обычно главной целью нормализации пространства P_n является задание в нем аффинной связности, которая в [1] названа внутренней связностью пространства $N(P_n)$. В нашем случае она определяется формами связности

$$\Omega^i = \omega^i_0, \quad \Omega^i_j = \omega^i_j - \delta^i_j \omega^0_0. \tag{6.1}$$

Рассмотрим еще две связности, порожденные нормализацией N. Объект (2.2) является объектом связности Врэнчану [2], [8] отображения φ. Пусть $R(p,\Pi)$ - пространства нуль-пар (p,Π), где $p \in P_n$, $\Pi \in P_n^*$. В [9] Розенфельд изучает инвариантную метрику $ds^2 = -2\omega^0_i \omega^i_0$ в $R(p,\Pi)$ и соответствующую ей связность Леви-Чивита, для объекта которой имеем:

$$G^h_{jt} = \frac{1}{2} a^{ih}(a_{ijt} + a_{itj} - a_{jti}), \tag{6.2}$$

где $a_{ij}=\Lambda_{ij}+\Lambda_{ji}$, $a_{ijk}=\Lambda_{ijk}+\Lambda_{jik}$, причем $a^{ij}a_{jk}=\delta^i_k$.

Предложение 6.1. Если касательные корреляции являются поляритетами, то связность Леви-Чевита, соответствующая метрике Розенфельда, является средней по отношению к внутренней связности нормализации и связности Врэнчану.

Доказательство вытекает из формул (2.2), (6.1), (6.2).

Предложение 6.2. Если внутренняя связность ν нормализации является эквипроективной, то связность Леви-Чивита, соответствующая метрике Розенфельда, является средней по отношению к связности ν и связности Врэнчану.

Предложение является следствием предложения 6.1 и предложения на странице 211 работы [1].

Библиографический список

1. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.

2. *Рыжков В.В.* Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Геометрия. 1963. Итоги науки / ВИНИТИ. М., 1965. С. 65-107.

3. *Рыжков В.В* Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Алгебра, топология, геометрия, 1970. Итоги науки / ВИНИТИ. М.,1971. С. 153-174.

4. *Андреев Б.А.* О дифференциальной геометрии соответствий между пространством пары (p,q) и точечным пространством // Диф. геом. многооб. фигур. Калининград, 1971. N2. С. 28-37.

5. *Андреев Б.А.* К геометрии дифференцируемого отображения $f:P_m \to P_n$ $(m \geq n)$ // Там же, 1987. N18. С. 5-9.

6. *Андреев Б.А.* О распределении линейных элементов, порожденных отображением $f:P_m \to A_n$ $(m \geq n)$ // Там же, 1979. N10. С. 5-9.

7. *Чех Э.* Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами // Чехословац. мат. журн. 1952. N1. P.91-107.

8. Vrănceanu G. Sul tensore associato ad una corrispondenza fra spazi proettivi // Boll. Unione mat. ital. 1957. V.12. N4. P. 489-506.

B.A. A n d r e e v

ON NORMALIZATION OF THE PROJECTIVE SPACE

The theory of point mappings structures are generalized and applied to the study of normalized projective space P_n. Geometrical images and numerical invariants generated by normalization are found and interpreted geometrically. Ptopositions are proved, in which properties of three affine connections defined by normalization are investigated.
УДК 514.75

ДВОЙСТВЕННЫЕ АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ S-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

С.Ю. В о л к о в а

(Балтийский военно-морской институт)

В статье рассматривается построение двойственных аффинных связностей $\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla}$ и $\overset{1}{\eta}, \overset{2}{\eta}$ скомпонованного S-распределения проективного пространства. Найдены охваты тензоров кривизны и кручения этих связностей. Показано, что связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ обобщенно сопряжены относительно поля основного фундаментального тензора Λ^n_{pq} базисного Λ-распределения. Выяснено, что пространство аффинной связности $\overset{1}{A}_{n,s}$ ($\overset{2}{A}_{n,s}$) имеет нулевое кручение тогда и только тогда, когда распределение нормалей 1-го (2-го) рода Λ-распределения является голономным. Аналогично пространство аффинной связности $\overset{1}{A}_{n,r}$ ($\overset{2}{A}_{n,r}$) имеет нулевое кручение тогда и только тогда, когда распределение нормалей 1-го (2-го) рода L-распределения является голономным. Найдена геометрическая интерпретация совпадения аффинных связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ ($\overset{1}{\eta}$ и $\overset{2}{\eta}$).

В работе используется следующая схема индексов:

$$I,J,K = \overline{1,n};\ p,q,s,t,... = \overline{1,r};\ i,j,k,l = \overline{r+1,m};\ \alpha,\beta,\gamma = \overline{m+1,n-1}.$$

1. Рассмотрим скомпонованное S-распределение [1], базисное Λ-распределение которого двойственно нормализовано в смысле Нордена-Чакмазяна [2],[3] полями квазитензоров ν^p_n, ν^0_p [1;§4]. Система форм $\left\{\omega^J_0, \overset{1}{\theta}{}^{\eth}_0, \overset{1}{\theta}{}^p_q\right\}$, где

$$\overset{1}{\theta}{}^p_0 = \omega^p_0 - \nu^p_n \omega^n_0, \tag{1}$$
$$\overset{1}{\theta}{}^p_q = \omega^p_q - \nu^p_n \omega^n_q - \delta^p_q(\omega^0_0 - \overset{1}{\theta}{}^t_0 \nu^0_t) - L^p_{iq}\omega^i_0 - H^p_{\alpha q}\omega^\alpha_0 - (\nu^p_{nq} - \Lambda^n_{tq}\nu^t_n \nu^p_n)\omega^n_0 + \nu^0_q \overset{1}{\theta}{}^p_0,$$

удовлетворяет следующим структурным уравнениям

$$D\omega^J_0 = \omega^K_0 \wedge (\omega^J_K - \delta^J_K \omega^0_0),\ D\overset{1}{\theta}{}^{\eth}_0 = \overset{1}{\theta}{}^t_0 \wedge \overset{1}{\theta}{}^p_t + \overset{1}{r}{}^p_{KL}\,\omega^K_0 \wedge \omega^L_0,$$
$$D\overset{1}{\theta}{}^{\eth}_q = \overset{1}{\theta}{}^t_q \wedge \overset{1}{\theta}{}^p_t + \overset{1}{r}{}^p_{qKL}\,\omega^K_0 \wedge \omega^L_0, \tag{2}$$

где, в частности, имеем