УДК 514.75

М. В. Кретов

ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ЭЛЛИПСОИДОВ, ДОПУСКАЮЩЕЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ

Исследован подкласс трехпараметрического семейства эллипсоидов в трехмерном аффинном пространстве. Дана конструкция многообразия.

A subclass of three-parametrical collection of ellipsoids in three-dimensional affine space is investigated. The construction of the considered manifold is given.

Ключевые слова: трехпараметрическое семейство, комплекс, эллипсоид, асимптотическая линия, безынтегральное представление, индикатриса вектора.

Key words: three-dimensional collection, complex, ellipsoid, asymptotic line, integral-free representation, vector indicatrix.

Продолжается исследование трехпараметрических семейств (комплексов) эллипсоидов в трехмерном аффинном пространстве, рассмотренных в работах [1—10]. Оно проводится в каноническом репере $R = \{A, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, где A — центр эллипсоида q; векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ направлены по тройке сопряженных диаметров эллипсоида, а концы их A_i, $i, j, k = 1, 2, 3$, лежат на q. Деривационные формулы R запишутся в виде $dA = \omega^i \mathbf{e}_i$, $d\mathbf{e}_i = \omega_i^j \mathbf{e}_j$, причем формы Пфаффа ω^i, ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры $D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i$, $D\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j$.

Уравнение эллипсоида q запишем в виде $F \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$.

Изучаются трехпараметрические семейства (комплексы) K^* эллипсоидов — подклассы многообразия $\bar{K}_3$, исследованного в работе [10], когда индикатриса вектора $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ является прямой, параллельной вектору $\mathbf{e}_1$. Из определения многообразия K_3^* следует, что его система дифференциальных уравнений Пфаффа будет иметь вид:

$$\begin{gathered}\omega_i^i = -\omega^i,\ \omega_1^2 = \omega_1^3 = 0,\ \omega_2^1 = \alpha\omega^3,\ \omega_3^1 = \alpha\omega^2,\\ \omega_2^3 = -\omega^3,\ \omega_3^2 = -\omega^2,\ d\ln\alpha = \omega^1 + \omega^2 + \omega^3.\end{gathered} \tag{1}$$

Анализируя систему (1) согласно работе [11], убеждаемся в том, что комплекс K_3^* существует и определяется вполне интегрируемой системой уравнений с произволом 10 постоянных.

Теорема 1. *Многообразия K_3^* обладают геометрическими свойствами:*

1) прямая $l = (A_3, \mathbf{e}_1)$ неподвижна;

2) при движении точки A_1 вдоль асимптотической линии γ_1 на поверхности (A_1), заданной уравнением $\omega^2 = 0$, прямая $m_1 = (A_1, \mathbf{e}_3)$ и координатная плоскость $(A, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ неподвижны;

3) поверхность (A_3) вырождается в прямую, параллельную вектору $\mathbf{e}_1$;

4) точка $P = A + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ неподвижна при движении точки A_1 вдоль асимптотической линии γ_2 на поверхности (A_1), заданной уравнением $\omega^3 = 0$;

5) класс отображений, порожденный рассматриваемым многообразием, не пересекается с отображениями, исследованными в работах [4], [7].

Доказательство. 1. Пусть $M_1 = A_3 + X^1\mathbf{e}_1$ — текущая точка прямой l. Тогда, используя систему (1), находим: $dM_1 = (dX^1 + (1 - X^1)\omega^1 + \alpha\omega^3)\mathbf{e}_1$, откуда непосредственно следует первое утверждение теоремы.

2. Обозначим $M_2 = A_1 + X^3\mathbf{e}_3$ и $M_3 = A + X^1\mathbf{e}_1 + X^3\mathbf{e}_3$ текущие точки соответственно прямой m_1 и координатной плоскости $(A, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$. Согласно (1):

$$\begin{aligned}&dM_2 = \alpha X^3\omega^2\mathbf{e}_1 + (1 - X^3)\omega^2\mathbf{e}_2 + (dX^3 + (1 - X^3)\omega^3)\mathbf{e}_3,\\ &dM_3 = (dX^1 + (1 - X^1)\omega^1 + \alpha X^3\omega^2)\mathbf{e}_1 + (1 - X^3)\omega^2\mathbf{e}_2 + (dX^3 + (1 - X^3)\omega^3)\mathbf{e}_3.\end{aligned} \tag{2}$$

Из (2) следует, что при движении точки A_1 вдоль асимптотической линии γ_1 прямая m_1 и координатная плоскость $(A, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ неподвижны.

3. Утверждение теоремы следует из формулы $dA_3 = (\omega^1 + \alpha\omega^2)\mathbf{e}_1$.

4. Из (1) получаем $dP = \alpha\omega^2\mathbf{e}_1$, откуда вытекает утверждение теоремы.

5. Последнее утверждение верно согласно системе (1) и [4], [7]. □

Доказанные геометрические свойства комплекса K_3^* позволяют его сконструировать, то есть построить его безынтегральное представление [12]. Для этого проводим следующие построения:

1) задаем произвольную прямую l и фиксируем на ней точку P;

2) проводим прямую l_1, параллельную l, и выбираем на ней точку A_3;

3) задаем плоскость π, проходящую через l и не содержащую l_1;

4) проводим на плоскости π через точку P прямую m;

5) в π выбираем A, не инцидентную l и m; через A проводим прямые, параллельные l и m; в пересечении с m и l получим точки A_1 и A_2.

С текущей точкой плоскости π совмещаем подвижный репер $R = \{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ такой, что $O \equiv A$ и $\mathbf{e}_i = \overline{AA_i}$. Образующий элемент исследуемого многообразия — квадрика q, соответствующая центру A, однозначно определяется точками A_i, центром A и сопряженными направлениями $\mathbf{e}_i = \overline{AA_i}$. При движении A в π получается двухпараметрическое семейство эллипсоидов q, а при перемещении A_3 по прямой l — трехпараметрическое семейство эллипсоидов q, которое назовем комплексом $\overline{K}_3^*$.

Докажем, что построенный комплекс квадрик q совпадает с многообразием K_3^*, то есть определяется в R системой уравнений (1).

Так как l задается уравнениями $X^3 = 0$, $X^2 = 1$, то, согласно неподвижности этой прямой, $\omega_1^3 = 0, \omega_2^3 = -\omega^3, \omega_1^2 = 0, \omega_2^2 = -\omega^2$. Прямая l_1 параллельна плоскости π, поэтому $\omega_3^3 = -\omega^3$. Из условия неподвижности прямой m, заданной уравнениями $X^3 = 0$, $X^1 = 1$ при движении точки A_1 вдоль асимптотической линии γ_2, следует, что $\omega_1^1 = -\omega^1, \omega_2^1 = k\omega^3$. m_1 определяется уравнениями $X^1 = 1$, $X^2 = 0$. Так как эта прямая неподвижна при движении точки A_1 вдоль линии γ_1, то $\omega_3^1 = \sigma\omega^2, \omega_3^2 = \beta\omega^2$.

Дифференцируя $\omega_3^3 = -\omega^3$, находим $\beta = -1$, поэтому $\omega_3^2 = -\omega^2$. Замыкая $\omega_1^1 = -\omega^1, \omega_2^1 = k\omega^3$, получим $\omega_3^1 = k\omega^2$, $dk = k\omega^1 + k\omega^2 + \alpha\omega^3$. Дифференцируя $\omega_3^1 = k\omega^2$, находим $k = \alpha$, и система уравнений принимает вид:

$$\omega_i^i = -\omega^i, \omega_1^2 = \omega_1^3 = 0, \omega_2^1 = \alpha\omega^3, \omega_3^1 = \alpha\omega^2,$$
$$\omega_2^3 = -\omega^3, \omega_3^2 = -\omega^2, d\ln\alpha = \omega^1 + \omega^2 + \omega^3.$$

Список литературы

1. *Кретов М. В.* Комплексы эллипсоидов в аффинном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. 1979. С. 41—47.

2. *Кретов М. В.* О комплексах центральных квадрик в аффинном пространстве // Там же. Вып. 11. С. 51—60.

3. *Кретов М. В.* Дифференциальная геометрия соответствий, ассоциированных с комплексами эллипсоидов // VI Прибалтийская геометрическая конференция. Таллин, 1984. С. 66.

4. *Кретов М. В.* О специальных подклассах дифференциальных отображений, ассоциированных с комплексами центральных невырожденных гиперквадрик // Диф. геом. многообр. фигур. 1984. Вып. 15. С. 49—54.

5. *Кретов М. В.* К геометрии комплексов эллипсоидов в аффинном пространстве // Там же. 1985. Вып. 16. С. 34—36.

6. *Кретов М. В.* Комплексы эллипсоидов со специальными свойствами ассоциированных с ними дифференцируемых отображений // Там же. 1986. Вып. 17. С. 51—57.

7. *Кретов М. В.* Дифференцируемые отображения, ассоциированных с многообразиями гиперквадрик : междунар. конф. по геометрии и приложениям. НРБ. София, 1986. С. 23.

8. *Кретов М. В.* О трехпараметрических семействах квадрик // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. 2008. Вып. 10. С. 95—98.

9. *Кретов М. В.* О трехпараметрическом семействе квадрик в аффинном пространстве : междунар. конф. «Высокопроизводительные вычисления — математические модели и алгоритмы», посвященная Карлу Якоби. Калининград, 2013. С. 156—158.

10. *Кретов М. В.* Геометрическая модель трехпараметрического семейства эллипсоидов // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2014. Вып. 4. С. 163—167.

11. *Малаховский В. С.* Введение в теорию внешних форм : учеб. пособие. Калининград, 1978.

12. *Кованцов Н. И.* Безынтегральное представление некоторых специальных классов комплексов : мат. сб. М., 1956. Т. 38, № 1. С. 107—128.

Об авторе

Михаил Васильевич Кретов — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: kretov1@mail.ru

About the author

Dr Michail Kretov — Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: kretov1@mail.ru