ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.3
1973

НОВОЖИЛОВА Т.П.

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ПАР В A_3, ПОРОЖДЕННЫХ ЭЛЛИПСОМ И ТОЧКОЙ.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматривается многообразие $\{CP\}_{21}$-двупараметрическое семейство (конгруэнция) пар фигур, образованных эллипсом C и точкой P, не инцидентной плоскости эллипса при условии, что многообразие (C)-конгруэнция, а многообразие (P)-линия (см.[I]). Такие многообразия мы назовем конгруэнцией F. Найдены геометрические образы, ассоциированные с конгруэнцией F. Исследованы аффинно-расслоенные конгруэнции [2].

§I. Теорема существования.

Обозначим буквой M_0 точку пересечения касательной к линии (P) с соответствующей плоскостью эллипса. Отнесем конгруэнцию F к реперу $R=\{A,\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$, где A -центр эллипса C, $\bar e_1=\overline{AM_0}$, $\bar e_3=\overline{AP}$ и вектор $\bar e_2$ сопряжен вектору $\bar e_1$ относительно эллипса C. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar A=\omega^\alpha \bar e_\alpha, \quad d\bar e_\alpha=\omega_\alpha^\beta \bar e_\beta, \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3), \tag{1.1}$$

где формы Пфаффа $\omega_\alpha^\beta, \omega^\alpha$ удовлетворяют уравнениям структуры:

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta, \quad \mathcal{D}\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha \tag{1.2}$$

и условию эквиаффинности

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0. \tag{1.3}$$

Уравнения эллипса относительно репера R записываются в виде:

$$a^2(x^1)^2+b^2(x^2)^2-1=0, \quad x^3=0, \quad a\neq 0. \tag{1.4}$$

Конгруэнция F определяется системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\omega^3=\Gamma_k^3\omega^k, \quad \omega_i^3=\Gamma_{ik}^3\omega^k, \quad \omega_3^1=-\omega^1-\omega^3-\omega_3^3, \quad db=b_k\omega^k, \\ \omega_3^2=-\omega^2, \quad \omega_i^j=\Gamma_{ik}^j\omega^k, \quad da=a_k\omega^k, \quad (i,j,k=1,2)\end{gathered} \tag{1.5}$$

и конечными соотношениями:

$$\begin{gathered}(1+\Gamma_{12}^2)(1+\Gamma_{11}^1+\Gamma_{11}^3-\Gamma_{31}^3)-\Gamma_{11}^2(\Gamma_{12}^1+\Gamma_{12}^3-\Gamma_{32}^3)=0, \\ (1+\Gamma_{31}^1)(1+\Gamma_{12}^2)-\Gamma_{32}^1\Gamma_{11}^2=0,\end{gathered} \tag{1.6}$$

где положено

$$\Gamma_{3k}^3=-\Gamma_{1k}^1-\Gamma_{2k}^2, \quad \Gamma_{31}^1=-1-\Gamma_1^3-\Gamma_{31}^3, \quad \Gamma_{32}^1=-\Gamma_2^3-\Gamma_{32}^3. \tag{1.7}$$

Из (I.5) и (I.6) следует, что конгруэнция F существует и определяется с произволом шести функций двух аргументов.

§ 2. Геометрические образы, ассоциированные с конгруэнцией F.

С конгруэнцией F ассоциируются следующие основные геометрические образы:

I) Прямолинейная конгруэнция $(A\bar{e}_1)$. Фокусы $\bar{F}'=\bar{A}+\lambda\bar{e}_1$ и торсы конгруэнции $(A\bar{e}_1)$ определяются соответственно уравнениями:

$$\lambda^2(\Gamma^2_{11}\Gamma^3_{12}-\Gamma^3_{11}\Gamma^2_{12})+\lambda[\Gamma^2_{11}(\Gamma^1_{12}+\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{32})-\Gamma^3_{11}-\Gamma^2_{12}(\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{21}-1-\Gamma^1_{31})]+$$
$$+(1+\Gamma^1_{31}-\Gamma^1_{11}-\Gamma^2_{21})=0, \qquad (2.1)$$

$$\omega^2\omega^3_1+(\omega^1+\omega^1_3-\omega^1_1-\omega^2_2)\,\omega^2_1=0. \qquad (2.2)$$

2) Прямолинейная конгруэнция $(A\bar{e}_2)$. Фокусы $\bar{F}''=\bar{A}+\mu\bar{e}_2$ и торсы конгруэнции $(A\bar{e}_2)$ определяются соответственно:

$$\mu^2(\Gamma^1_{21}\Gamma^3_{22}-\Gamma^1_{22}\Gamma^3_{21})+\mu[\Gamma^1_{21}(\Gamma^1_{12}+\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{32})+\Gamma^3_{22}+\Gamma^1_{22}(1+\Gamma^1_{31}-\Gamma^1_{11}-\Gamma^2_{21})]+$$
$$+(\Gamma^1_{12}+\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{32})=0, \qquad (2.3)$$

$$\omega^1\omega^3_2+(\omega^1+\omega^1_3-\omega^1_1-\omega^2_2)\,\omega^1_2=0. \qquad (2.4)$$

3) Прямолинейная конгруэнция $(A\bar{e}_3)$. Фокусы F'''_i луча прямолинейной конгруэнции $(A\bar{e}_3)$ и соответствующие им фокальные семейства определяются формулами:

$$\bar{F}'''_1=\bar{A}+\bar{e}_3, \qquad \omega^2=0, \qquad (2.5)$$

$$\bar{F}'''_2=\bar{A}-\frac{1}{\Gamma^1_{31}}\bar{e}_3, \qquad \omega^1+\omega^1_3=0. \qquad (2.6)$$

4) Фокальные поверхности конгруэнции эллипсов (C). Уравнения для определения фокальных точек эллипса C имеют вид:

$$x^1[(ab'_1x^1-b'_2x^2-a^2)C_1+(b_4x^2-ax^1b_3)C_2]+(x^2)^2b(C_1b_1-C_2b_2)+$$
$$+b^2x^2[(1+\Gamma^2_{22}x^2)C_2-x^2(x^2\Gamma^3_{22}\Gamma^2_{21}+x^1\Gamma^2_{21}\Gamma^3_{22}+\Gamma^3_2\Gamma^2_{21})]=0, \qquad (2.7)$$
$$a^2(x^1)^2+b^2(x^2)^2-1=0,$$

где $b'_1=a_1-a\Gamma^1_{11}$, $b'_2=a^2\Gamma^1_{21}+\Gamma^2_{11}b^2$, $b_3=a_2-\Gamma^1_{12}a$,
$b_4=a^2\Gamma^1_{22}+\Gamma^2_{12}b^2$, $C_1=x^1\Gamma^3_{12}+x^2\Gamma^3_{22}+\Gamma^3_2$,
$$C_2=x^1\Gamma^3_{11}+x^2\Gamma^3_{21}+\Gamma^3_1.$$

5) Асимптотические линии на поверхности (A).

Уравнение асимптотических линий записывается в виде:

$$\omega^1\omega^3_1+\omega^3\omega^3_3+\omega^1(-d\Gamma^1_{31}-d\Gamma^1_{11}-d\Gamma^2_{21})+\omega^2\omega^3_2+$$
$$+\omega^2(-d\Gamma^1_{32}-d\Gamma^1_{12}-d\Gamma^2_{22})+(1+\Gamma^1_{31}-\Gamma^1_{11}-\Gamma^2_{21})(\omega^1\omega^1_1+\omega^3\omega^1_3+\omega^2\omega^1_2)+$$
$$+(\Gamma^1_{32}-\Gamma^1_{12}-\Gamma^2_{22})(\omega^1\omega^2_1-\omega^3\omega^2+\omega^2\omega^2_2)=0. \qquad (2.8)$$

5) Характеристические точки граней $(\bar{e}_1\bar{e}_3)$, $(\bar{e}_1,\bar{e}_2)$.

Характеристической точкой грани $(\bar{e}_1\bar{e}_2)$ является точка

$$\bar{M}_1=\bar{A}+\frac{\Gamma^3_{21}\Gamma^3_2-\Gamma^3_1\Gamma^3_{22}}{\Gamma^3_{11}\Gamma^3_{22}-\Gamma^3_{21}\Gamma^3_{12}}\bar{e}_1+\frac{\Gamma^3_{12}\Gamma^3_1-\Gamma^3_{11}\Gamma^3_2}{\Gamma^3_{11}\Gamma^3_{22}-\Gamma^3_{21}\Gamma^3_{12}}\bar{e}_3 \qquad (2.9)$$

и грани $(\bar{e}_1\bar{e}_3)$ – точка

$$\bar{M}_2=\bar{A}+\bar{e}_3.$$

§3. Аффинно расслояемые конгруэнции F_c.

Определение I. Конгруэнцией F_c называется конгруэнция F, если существует одностороннее аффинное расслоение от конгруэнции коник (C) к семейству плоскостей $(\bar{e}_1\bar{e}_3)$[2], $b=1$.

Теорема I. Существуют 3 непересекающихся класса конгруэнции F_c: конгруэнции F'_c, F''_c, F'''_c определяемые с произволом двух функций двух аргументов.

Доказательство. В силу условий определения для конгруэнции F_c имеют место следующие конечные соотношения:

$$\Gamma^2_{11}=0,\quad \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21}=0,\quad \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{12}-\Gamma^3_{21}=0,\quad \Gamma^2_{12}-\Gamma^3_1=0, \qquad (3.1)$$
$$\frac{a_1}{a}\Gamma^2_{12}-\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{11}=0.$$

Рассмотрим случай

$$\Gamma^2_{12}=0. \qquad (3.2)$$

Система дифференциальных уравнений (I.5), с учетом (I.6) и (3.I) принимает вид:

$$\omega_3^2=-\omega^2,\quad \omega_1^2=0,\quad \omega^3=-(\Gamma_{32}^1+\Gamma_{32}^3)\omega^2,$$

$$\omega_2^3=\Gamma_{22}^3\omega^2,\quad \omega_1^3=\Gamma_{12}^3\omega^2,\quad \omega_3^1=-\omega^1+\Gamma_{32}^1\omega^2, \qquad (3.3)$$

$$\omega_3^3=\Gamma_{32}^3\omega^2,\quad \omega_1^1=\Gamma_{12}^1\omega^2-\omega^1,\quad da=a_i\omega^i,\quad \omega_2^1=\Gamma_{2i}^1\omega^i.$$

Система (3.3)- в инволюции и определяет конгруэнцию F_c' с произволом двух функций двух аргументов. Если

$$\Gamma_{21}^2=0,$$

то соотношения (I.6) принимают вид:

$$(1+\Gamma_{12}^2)(1+\Gamma_{11}^1+\Gamma_{11}^3-\Gamma_{31}^3)=0,$$

$$(1+\Gamma_{12}^2)(\Gamma_{31}^1+1)=0.$$

При $1+\Gamma_{12}^2=0$ получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\omega_1^2=-\omega^2,\quad \omega_3^2=-\omega^2,\quad \omega^3=-\omega^1-\Gamma_{32}^1\omega^2-\Gamma_{12}^3\omega^2,$$

$$\omega_2^2=\Gamma_{22}^2\omega^2,\quad \omega_2^1=\Gamma_{2i}^1\omega^i,\quad \omega_1^1=\Gamma_{1i}^1\omega^i,\quad \omega_1^3=\Gamma_{1i}^3\omega^i, \qquad (3.3)'$$

$$\omega_2^3=\Gamma_{2i}^3\omega^i,\quad da=a_i\omega^i,\quad \omega_3^1=\Gamma_{3i}^1\omega^i$$

и соотношения:

$$\Gamma_{21}^1=-\Gamma_{21}^3,\quad \frac{a_1}{a}+2\Gamma_{11}^3=0, \qquad (3.4)$$

$$\Gamma_{31}^1=-\Gamma_{31}^3,\quad \Gamma_{11}^1+\Gamma_{11}^3=0,$$

определяющие конгруэнцию F_c'' с произволом двух функций двух аргументов, и при

$$\Gamma_{31}^1=-1,\quad 1+\Gamma_{11}^1+\Gamma_{11}^3-\Gamma_{31}^3=0$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$\omega_3^2=-\omega^2,\quad \omega^3=-\Gamma_{31}^3\omega^1-(\Gamma_{32}^3+\Gamma_{32}^1)\omega^2,$$

$$\omega_1^2=\Gamma_{31}^3\omega^2,\quad \omega_3^1=-\omega^1+\Gamma_{32}^1\omega^2,\quad \omega_2^2=\Gamma_{22}^1\omega^2, \qquad (3.5)$$

$$\omega_1^1=\Gamma_{1i}^1\omega^i,\quad \omega_2^1=\Gamma_{2i}^1\omega^i,\quad \omega_1^3=\Gamma_{1i}^3\omega^i,\quad \omega_2^3=\Gamma_{2i}^3\omega^i,\quad da=a_i\omega^i$$

и соотношения

$$1+\Gamma_{11}^1+\Gamma_{11}^3-\Gamma_{31}^3=0,\quad \Gamma_{21}^1\Gamma_{12}^2-\Gamma_{21}^3=0,$$

$$\frac{a_1}{a}\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^3=0,$$

определяющие конгруэнцию F_c''' с произволом двух функций двух аргументов. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. Конгруэнция F_c' обладает следующими свойствами: I) поверхность (M_0) конгруэнции F_c' вырождается в линию. Прямолинейная конгруэнция $(A\bar e_1)$ вырождается в линейчатую поверхность, 2) одно семейство торсов прямолинейной конгруэнции $(A\bar e_2)$ соответствует семейству торсов прямолинейной конгруэнции $(A\bar e_3)$ и соответствует семейству координатных линий $\omega^2=0$; 3) прямолинейная конгруэнция $(A\bar e_3)$ есть параболическая конгруэнция со сдвоенным фокусом в точке P, 4) огибающие семейства плоскостей $(\bar e_1\bar e_3)$ и $(\bar e_1\bar e_2)$ являются торсами. Их прямолинейные образующие определяются соответственно уравнениями:

$$x^3=1,\quad x^2=0, \qquad (3.6)$$

$$x^1=\frac{\Gamma_{32}^1+\Gamma_{32}^3}{\Gamma_{12}^3}-\frac{\Gamma_{22}^3}{\Gamma_{12}^3}x^2,\quad x^3=0, \qquad (3.7)$$

5) одно семейство асимптотических линий на поверхности (A) соответствует семейству координатных линий $\omega^2=0$,

6) вдоль направления $\omega^2=0$ все коники конгруэнции (C) принадлежат одной плоскости,

7)две фокальные точки конгруэнции эллипсов (C) есть точки пересечения эллипса C с характеристикой плоскости $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) Из (I.I) и (3.2) следует, что

$$d\bar{M}_0 = \omega^2[\bar{e}_2 + \Gamma^1_{12}\bar{e}_1 + (\Gamma^3_{12} - \Gamma^1_{32} - \Gamma^3_{32})\bar{e}_3],$$

$$d\bar{A} = \omega^1\bar{e}_1 + \omega^2\bar{e}_2 - (\Gamma^1_{32} + \Gamma^3_{32})\omega^2\bar{e}_3,$$

$$d\bar{e}_1 = \omega^1_1\bar{e}_1 + \Gamma^3_{12}\omega^2\bar{e}_3.$$

Следовательно (M_0)-линия и прямолинейная конгруэнция $(A\bar{e}_1)$ вырождается в линейчатую поверхность.

Справедливость свойств 2),3),4),5) непосредственно вытекает соответственно из формул (3.2),(2.4),(2.6);(3.2),(2.5),(2.6); (3.2),(2.9),(2.IO);(3.2),(2.8).

6) Из (I.I) и (3.2) следует, что все изменения векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ вдоль направления $\omega^2 = 0$ происходят в плоскости $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, т.е. плоскость коники остается неподвижной.

7) Система уравнений для определения фокальных точек конгруэнции эллипсов (C) распадается на две подсистемы:

$$\begin{cases} x^1\Gamma^3_{12} + x^2\Gamma^3_{22} - \Gamma^1_{32} - \Gamma^3_{32} = 0, \\ a^2(x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0; \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} -a(a_1 + a)(x^1)^2 + x^1x^2a^2\Gamma^1_{21} + (x^2)^2 + a^2x^1 = 0, \\ a^2(x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Учитывая (3.7), получаем: фокальные точки конгруэнции эллипсов (C) (3.8) есть точки пересечения эллипса C с характеристикой плоскости $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$.

Теорема доказана.

Л и т е р а т у р а

I.Малаховский В.С.,О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.(Данный сборник) ,с.

2.Ткач Г.П.,О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве.(Данный сборник), с.