V. Malakhovsky

ON SAME PROPERTIES OF BASE SEQUENCES
OF PIFAGOR`S TRIANGLES

We consider two infinite sequences of Pifagor`s triangles with prime cathetuses and prime hypotenuse (base sequences of the 1-st and 2-nd kind). It is proved, that even cathetus of the each Pifagor`s triangle out of the first sequence is divisible by 12 or 60, and hypotenuse is divisible by 5. One of cathetuses for arbitrary Pifagor`s triangle out of the second sequence is divisible by 5, and one of its cathetuses (the same or the other) is divisible by 3. Area of each such triangles is divisible by 30.

УДК 514.75

W.S. Malachowskij

(Staatliche Universität zu Kaliningrad)

ANWENDUNGEN CARTAN‘s METHODE ZU DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

(Ein Vortrag, der Autor an der Universität München in November 1995 gelesen hat)

Dieser Artikel ist einen kurzen Bericht über den Anwendungen von der Cartan‘s Methode zu den Pfaff‘s Systemen der Differentialgleichungen – voll integrabille und nicht voll integrabille. Einige konkrete Beispielen mit Lösung in Quadraturen dieser Systemen sind betrachtet. Die Reduzierung der Verändlichen in Pfaff‘s System mit Lösung eines Beispiels ist auch gezeigt.

1. Einfürung in der Cartan‘s Methoden. Es sei V – die Menge aller analytischen Funktionen von n Verändlichen $x^1, x^2, \dots, x^n$:

$$V=\{f(x^1, x^2, \dots, x^n)\,|\,x^i\in \mathrm{R}\} \tag{1.1}$$

Die antikommutative, sogenante *äuβere*, Multiplikation „$\wedge$“ in der Menge der Differentialen dx^i ($i=\overline{1,n}$) ist auf folgende Weise definiert:

1) wenn die Zahlen $i_1, i_2, \dots, i_p$ sind paarweise verschieden und $j_1, j_2, \dots, j_p$ sind dieselbe Zahlen mit $j_1<j_2<\dots j_p$, dann

$$dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}=\begin{cases} dx^{j_1}\wedge dx^{j_2}\wedge\dots\wedge dx^{j_p}, \text{wenn} \begin{pmatrix} i_1\dots i_p\\ j_1\dots j_p\end{pmatrix} \text{gerade ist,}\\ -dx^{j_1}\wedge dx^{j_2}\wedge\dots\wedge dx^{j_p}, \text{wenn} \begin{pmatrix} i_1\dots i_p\\ j_1\dots j_p\end{pmatrix} \text{ungerade ist.}\end{cases}$$

2) wenn mindestens zwei Zahlen von $i_1, i_2, \dots, i_p$ gleich sind, dann $dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}=0$.

Daraus folgt

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i . \tag{1.2}$$

Die Differentialform

$$\Omega_p = a_{i_1 i_2 \ldots i_p}\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \tag{1.3}$$

heiβt äuβere Differentialform der Potenz p. Die lineare Form

$$\omega(d) = a_i\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) dx^i \tag{1.4}$$

heiβt 1-Form oder Pfaff's Form.

Es gibt zwei wichtige Operationen in Cartan's Methoden:

1) äuβere Differenzieruung D: $\Omega_p \to \Omega_{p+1}$

$$D\Omega_p = da_{i_1 i_2 \ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} ; \tag{1.5}$$

2) algebraische Differenzierung ∂: $\Omega_p \to \Omega_{p-1}$: $\dfrac{\partial \Omega_p}{\partial dx^j} = \Omega_{p-1}$, wo Ω_{p-1} aus Ω_p folgenderweise erzeugt ist: jeder Summand, der das Symbol „dx^j" nicht enthält, bei Null entsetzt wird, in allen anderen summanden dieser Symbol soll am Anfang an der erste Stelle Platz nehmen und dann bei „1" entsetzt werden.

Beispiele: $\Omega_2 = 3x^2 z dx \wedge dy - e^y dy \wedge dz$.

1) $D\Omega_2 = \left(6xzdx + 3x^2 dz\right) \wedge dx \wedge dy - e^y dy \wedge dy \wedge dz = 3x^2 dx \wedge dy \wedge dz$;

2) $\dfrac{\partial \Omega_2}{\partial dx} = 3x^2 z dy$, $\dfrac{\partial \Omega_2}{\partial dy} = -3x^2 z dx - e^y dz$, $\dfrac{\partial \Omega_2}{\partial dz} = e^y dy$.

Aus der Formel (1.5) unmittelbar folgen folgende Regeln der äuβere Differenzierung:

$$D\left(\Omega_p + \tilde{\Omega}_p\right) = D\Omega_p + D\tilde{\Omega}_p, \quad D\left(\Omega_p \wedge \tilde{\Omega}_q\right) = D\Omega_p \wedge \tilde{\Omega}_q + (-1)^p \Omega_p \wedge D\tilde{\Omega}_q,$$

$$D\left(D\Omega_p\right) \equiv 0 \text{ (Poincare's Theorem).}$$

2. Anwendung zu Pfaff's System der Differenzialgleichungen. Das Beliebiges System der gewöhnlichen oder Partielldifferenzialgleichungen kann man als Pfaff's System repräsetieren mittels Einführug Hilfsfunktionen. Zum Beispiel, wir haben ein System der Partielldifferenzialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^3 \frac{\partial z}{\partial y} + y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \sin y . \tag{2.1}$$

Bezeichnen $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, $r = \dfrac{\partial q}{\partial y}$. Dann aus (2.1) folgt:

$$dz = \sin y \, dx + q \, dy, \quad dq = \left(x^3 q + y^2\right) dx + r \, dy, \quad dx \wedge dy \neq 0 .$$

Cartan's Methode gestattet das beliebiges System der Pfaff's Gleichungen mittels algebraische Rechungen zu analysieren. Für beliebige Pfaff's System

$$\Theta^{\alpha} \equiv -dz^{\alpha} + b_a^{\alpha}\left(x^b, z^p\right)dx^a + c_{\xi}^{\alpha}\left(x^b, z^p\right)dz^{\xi} = 0 \tag{2.2}$$

($a, b, c = \overline{1, m}; \alpha, \beta = \overline{1, s_0}; p = \overline{1, r}; \xi, \eta = \overline{s_0 + 1, r}$), wo

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^m \neq 0 \tag{2.3}$$

wir definieren:

1) die Zahlen s_0, m, r, q, wo s_0 die Zahl der linear unabhängigen Gleichungen, m – die Zahl der unabhängigen Veränderlichen, r – die Zahl der unbekannten Funktionen, $q=r-s$;

2) das rein abgeschlossenes System

$$\Theta^{\alpha} = 0, \quad \overline{D\Theta^{\alpha}} = 0, \tag{2.4}$$

wo

$$\overline{D\Theta^{\alpha}} = D\Theta^{\alpha}\Big|_{dz^{\alpha} = b_a^{\alpha} dx^a + c_{\xi}^{\alpha} dz^{\xi}}; \tag{2.5}$$

3) die assoziierte Matrizen M_1, M_2, …, M_{m-1}:

$$M_1 = \left(m_{\xi,1}^{\alpha}\right), M_2 = \begin{pmatrix} m_{\xi,1}^{\alpha} \\ m_{\xi,2}^{\alpha} \end{pmatrix}, \ldots, M_{m-1} = \begin{pmatrix} m_{\xi,1}^{\alpha} \\ \ldots\ldots \\ m_{\xi,m-1}^{\alpha} \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

wo

$$m_{\xi,h}^{\alpha} = \frac{\partial \overline{D\Theta^{\alpha}}}{\partial dz^{\xi}}\Bigg|_{dx^{\alpha} = X_h^{\alpha},\, dz^{\xi} = Z_h^{\xi}} \quad \left(\mathrm{h} = \overline{1, \mathrm{m}-1}\right); \tag{2.7}$$

4) die charakteristische Zahlen des Systems s_1, s_2, …, s_m, wo s_1 ist der Rang der Matrix M_1,

$s_2=Rang\ M_2-Rang\ M_1$, …, $s_{m-1}=Rang\ M_{m-1}-Rang\ M_{m-2}$, $s_m=q-(s_1+s_2+\ldots+s_{m-1})$; (2.8)

aus (2.6) folgt:

$$s_0 \geq s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_m; \tag{2.9}$$

5) Cartan‘s Zahl $Q=s_1+2s_2+\ldots+ms_m$;

6) die Zahl N der frein Veränderlichen in dem prolongiertem System

$$\Theta^{\alpha} = 0, \; dz^{\xi} = a_b^{\xi}\left(x^1, x^2, \ldots, x^m, z^1, z^2, \ldots, z^r\right)dx^b. \tag{2.10}$$

Es gibt zwei wichtige Cartan‘s Theoreme.

1. Wenn $Q=N$, dann das gegebene System (2.2) in involution ist. Die gemeinsame Lösung dieses Systems ist mit Freicheit s_m Funktionen von m Argumenten, s_{m-1} Funktionen von m-1 Argumenten, u.s.w., mit s_1 Funktionen von einer Argument und mit s_0 beliebige Konstanten.

2. Wenn $Q\neq N$, dann das gegebenes System soll prolongiert werden. Nach endliche Male der Prolongierung entsteht entweder das System in Involution oder wir kommen zu Widerspruch, d.h. das gegebene System kein Lösung hat.

3. Die voll integrabille Systeme der Differentialgleichungen. Wenn $r=s_0$ das System (2.2) nimmt die Forme

$$dz^\alpha = b_a^\alpha\left(z^\beta, x^b\right)dx^a. \tag{3.1}$$

Das rein abgeschlossenes System ist (3.1) und

$$\left(\frac{\partial b_a^\alpha}{\partial x^b} - \frac{\partial b_b^\alpha}{\partial x^a} + \frac{\partial b_a^\alpha}{\partial z^\beta} b_b^\beta - \frac{\partial b_b^\alpha}{\partial z^\beta} b_a^\beta\right) dx^b \wedge dx^a = 0. \tag{3.2}$$

Aus (2.3) folgt, daβ wenn $\frac{\partial b_a^\alpha}{\partial x^b} + \frac{\partial b_a^\alpha}{\partial z^\beta} b_b^\beta \not\equiv \frac{\partial b_b^\alpha}{\partial x^a} + \frac{\partial b_b^\alpha}{\partial z^\beta} b_a^\beta \left(a,b=\overline{1,m}\right)$ dann das System (3.1) kein Lösung hat. Aber wenn

$$\frac{\partial b_a^\alpha}{\partial x^b} + \frac{\partial b_a^\alpha}{\partial z^\beta} b_b^\beta \equiv \frac{\partial b_b^\alpha}{\partial x^a} + \frac{\partial b_b^\alpha}{\partial z^\beta} b_a^\beta, \tag{3.3}$$

dann die Gleichungen (3.2) verschwinden. Solches System heiβt voll integrabilles System der Differentialgleichunen.

Es gibt die standarte Methode für die Lösung des voll integrabilles Systems:

1) mann nimmt ein beliebiges Punkt $M_1(x_1^a)$ und sucht die Lösung des Systems (3.1) auf der Gerade OM_1:

$$x^a = x_1^a t; \tag{3.4}$$

$$\frac{dz^\alpha}{dt} = b_a^\alpha\left(x_1^b t, z^\beta\right)x_1^a; \tag{3.5}$$

2) sei

$$z^\alpha = f^\alpha\left(x_1^b, t, c_1, ..., c_{s_0}\right); \tag{3.6}$$

die gemeinsame Lösung des Systems (3.5). Dann bei Entsetzung t auf 1 wir erhalten die gemeinsame Lösung des Systems (3.1):

$$z^\alpha = f^\alpha\left(x^b, 1, c_1, ..., c_{s_0}\right). \tag{3.7}$$

Beispiel:

$$dz = udx + zdy,\ du = u(dx+dy),\ dv = vdx + udy,\ dx \wedge dy \neq 0. \tag{3.8}$$

Wir haben

$$du \wedge dx + dz \wedge dy = 0,\ du \wedge (dx+dy) = 0,\ dv \wedge dx + du \wedge dy = 0. \tag{3.9}$$

Aus (3.8) folgt daβ die Quadratische äuβere Gleichungen (3.9) identisch verschwinden. Das System (3.8) ist voll integrabilles. Die gemeinsame Löung erhalten wir mittels standarte Methode:

1) $x=x_1t$, $y=y_1t$, $dx=x_1dt$, $dy=y_1dt$;

2) $\frac{dz}{dt} = ux_1 + zy_1,\ \frac{du}{dt} = u(x_1+y_1),\ \frac{dv}{dt} = vx_1 + uy_1;$ (3.10)

3) $u = C_1 e^{(x_1+y_1)t},\ z = C_1 e^{(x_1+y_1)t} + C_2 e^{y_1 t},\ v = C_1 e^{(x_1+y_1)t} + C_3 e^{x_1 t};$

4) $u = C_1 e^{x+y},\ z = C_1 e^{x+y} + C_2 e^{y},\ v = C_1 e^{x+y} + C_3 e^{x}.$

4. Die Pfaff‘s Systeme nicht voll integrabille.

№1

$$du_1 = z_1dx + \frac{1}{2}x^2dy, du_2 = \frac{1}{2}y^2dx + z_2dy, du_3 = z_2dx + z_1dy, dx \wedge dy \neq 0. \quad (4.1)$$

1) s_0=3, m=2, r=5, q=2;

2) $dz_1 \wedge dx + xdx \wedge dy = 0,\ ydy \wedge dx + dz_2 \wedge dy = 0,\ dz_2 \wedge dx + dz_1 \wedge dy = 0;$

3) $M_1 = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & Y_1 \\ Y_1 & X_1 \end{pmatrix}$; 4) s_1=2, s_2=0; 5) Q=2;

6) $dz_1 = \alpha dx + \beta dy,\quad dz_2 = \gamma dx + \delta dy;$

$\beta dy \wedge dx + xdx \wedge dy = 0,\ ydy \wedge dx + \gamma dx \wedge dy = 0,\ \delta dy \wedge dx + \alpha dx \wedge dy = 0;$

$\beta = x,\ \gamma = y,\ \delta = \alpha;$

$$dz_1 = \alpha dx + xdy,\quad dz_2 = ydx + \alpha dy. \quad (4.2)$$

N=1<Q. Das System ist nicht in Involution. Für das prolongiertes System (4.1) und (4.2) wir haben:

1) $\tilde{s}_0 = 5,\ \tilde{m} = 2,\ \tilde{r} = 6,\ \tilde{q} = 1;$

2) $d\alpha \wedge dx + dx \wedge dy = 0,\quad dy \wedge dx + d\alpha \wedge dy = 0;$

3) $\tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{Y}_1 \end{pmatrix}$; 4) $\tilde{s}_1 = 1,\ \tilde{s}_2 = 0$; 5) $\tilde{Q} = 1$;

6) $d\alpha = \alpha_1 dx + \beta_1 dy,\ \beta_1 dx \wedge dy + dx \wedge dy = 0,\ dx \wedge dy + \alpha_1 dx \wedge dy = 0$.

Daraus folgt: α_1=1, β_1=1;

$$d\alpha = dx + dy. \quad (4.3)$$

Das zweite prolongierte System (4.1), (4.2), (4.3) ist voll intergrabille. Lösen es:

1) $x=x_1t,\ y=y_1t,\ dx=x_1dt,\ dy=y_1dt;$

2) $\dfrac{d\alpha}{dt} = x_1 + y_1,\ \dfrac{dz_1}{dt} = \alpha x_1 + x_1y_1,\ \dfrac{dz_2}{dt} = \alpha y_1 + x_1y_1,$

$\dfrac{du_1}{dt} = z_1x_1 + \dfrac{1}{2}x_1^2y_1t^2,\ \dfrac{du_2}{dt} = \dfrac{1}{2}x_1y_1^2t^2 + y_1z_2, \dfrac{du_3}{dt} = z_2x_1 + y_1z_1;$

3 – 4) $\alpha = x + y + C_1,\ z_1 = \dfrac{1}{2}x^2 + C_1x + xy + C_2,\ z_2 = \dfrac{1}{2}y^2 + C_1y + xy + C_3,$

$$u_1 = \frac{1}{6}x^2(x+3y) + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_4, u_2 = \frac{1}{6}y^2(y+3x) + \frac{1}{2}C_1y^2 + C_3y + C_5, \quad (4.4)$$

$$u_3 = \frac{1}{2}xy(x+y) + C_1xy + C_3x + C_2y + C_6..$$

№2

$$dz_1 = udx + x^2dy,\ dz_2 = udy + y^2dx,\ dx \wedge dy \neq 0. \qquad (4.5)$$

1) s_0=2, m=2, r=3, q=1;

2) $du \wedge dx + 2xdx \wedge dy = 0,\ du \wedge dy + 2ydy \wedge dx = 0;$

3) $M_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}$; 4) s_1=1, s_2=0; 5) Q=1;

6) $du = \alpha dx + \beta dy,\ \begin{cases} \beta dy \wedge dx + 2xdx \wedge dy = 0, \\ \alpha dx \wedge dy + 2ydy \wedge dx = 0, \end{cases} \alpha = 2y,\ \beta = 2x;$

$$du=2(ydx+xdy) \qquad (4.6)$$

N=0<Q. Das System ist nicht in Involution. Das prolongierte System (4.5), (4.6) ist voll integrabille.

$$u=2xy+C_1,\ z_1=x(xy+C_1)+C_2,\ z_2=y(xy+C_1)+C_3. \qquad (4.7)$$

№3

$$dt_1 = udx - 2vdy,\ dt_2 = vdy + wdz,\ dt_3 = 2wdz + udx,\ dx \wedge dy \wedge dz \neq 0. \qquad (4.8)$$

1) s_0=3, m=3, r=6, q=3;

2) $du \wedge dx - 2dv \wedge dy = 0,\ dv \wedge dy + dw \wedge dz = 0,\ 2dw \wedge dz + du \wedge dx = 0;$

3) $M_1 = \begin{pmatrix} X_1 & -2Y_1 & 0 \\ 0 & Y_1 & Z_1 \\ X_1 & 0 & 2Z_1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} X_1 & -2Y_1 & 0 \\ 0 & Y_1 & Z_1 \\ X_1 & 0 & 2Z_1 \\ X_2 & -2Y_2 & 0 \\ 0 & Y_2 & Z_2 \\ X_2 & 0 & 2Z_2 \end{pmatrix};$

4) s_1=2, s_2=1, s_3=0; 5) Q=4;

6) $du=\alpha dx,\ dv=\beta dy,\ dw=\gamma dz.$ (4.9)

N=3<Q. Das System ist nicht in Involution. Das prolongierte System (4.8), (4.9) ist in Involution. Aus

$$d\alpha \wedge dx = 0,\ \ d\beta \wedge dy = 0,\ \ d\gamma \wedge dz = 0, \qquad (4.10)$$

folgt:

$$\alpha=\alpha(x),\ \beta=\beta(y),\ \gamma=\gamma(z). \qquad (4.11)$$

Dann

$$u = \int \alpha(x)dx + C_1,\ \ v = \int \beta(y)dy + C_2,\ \ w = \int \gamma(z)dz + C_3. \qquad (4.12)$$

$$\begin{cases} t_1 = \int u(x)dx - 2\int v(y)dy + C_4, \\ t_2 = \int v(y)dy + \int w(z)dz + C_5, \\ t_3 = 2\int w(z)dz + 2\int u(x)dx + C_6. \end{cases} \qquad (4.13)$$

5. Die Reduzierung der Verändlichen. Für eines beliebiges Pfaff's system der Diffrentialgleichungen bestimmt man eines anderes sogenannte *assoziiertes System,* daβ besteht aus Pfaff's Gleichungen:

$$\Theta^\alpha = 0,\ \frac{\partial D\Theta^\alpha}{\partial dx^a} = 0,\ \frac{\partial \Theta^\alpha}{\partial dz^p} = 0\ \left(\alpha = \overline{1, s_0};\, a = \overline{1, m};\ p = \overline{1, r}\right). \tag{5.1}$$

Bezeichnen wir als R der Rang dieses Systems. Es gibt ein wichtiges Theorem.

Das assoziiertes System (5.1) ist voll integrabilles. Sein erste Integralen bielden die minimale Menge der Verändlichen, mittels kann man alle Gleichungen

$$\Theta^\alpha = 0 \tag{5.2}$$

vorstellen.

Daraus folgt, wenn Rang R ist weniger als der Zahl m+r Verändlichen wir reduzieren können.

Betrachten wir eines *Beispiel*

$$dz = (u + y)dx - xdv,\quad dt = (v + x)dy - ydu,\quad dx \wedge dy \neq 0. \tag{5.3}$$

1) s_0=2, m=2, r=4;

2) $(du + dy) \wedge dx + dv \wedge dx = 0,\ \ (dv + dx) \wedge dy + du \wedge dy = 0.$

Daraus folgt

$$\frac{\partial D\Theta^1}{\partial dx} = -du - dv - dy = 0,\ \frac{\partial D\Theta^1}{\partial dy} = dx = 0,\ \frac{\partial D\Theta^1}{\partial du} = dx = 0,\ \frac{\partial D\Theta^1}{\partial dv} = dx = 0,$$

$$\frac{\partial D\Theta^2}{\partial dx} = dy = 0,\ \frac{\partial D\Theta^2}{\partial dy} = -du - dv - dx = 0,\ \frac{\partial D\Theta^2}{\partial du} = dy = 0,\ \frac{\partial D\Theta^2}{\partial dv} = dy = 0.$$

Das assoziiertes System besteht aus Gleichungen:

$$dx=0,\ dy=0,\ du+dv=0,\ dz=-xdv,\ dt=-ydu. \tag{5.4}$$

Dieses System ist voll integrabilles. Sein erste Integralen sind

$$x,\ y,\ \xi=u+v,\ \eta_1=z+xv,\ \eta_2=t+yu. \tag{5.5}$$

Das System (5.3) nimmt die Form:

$$d\eta_1=(\xi+y)dx,\ d\eta_2=(\xi+x)dy. \tag{5.6}$$

Das abgeschlossenes system besteht aus Gleichungen (5.6) und die quadratische Gleichungen

$$(d\xi + dy) \wedge dx = 0,\ \ (d\xi + dx) \wedge dy = 0,\ \ dx \wedge dy \neq 0. \tag{5.7}$$

Wir analysieren dieses System:

1) s_0=2, m=2, r=3, q=1; 2) ist (5.7);

3) $M_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}$; 4) s_1=1, s_2=0; 5) Q=1;

6) $d\xi = \alpha dx + \beta dy,\ \ (\beta+1)dy \wedge dx = 0,\ \ (\alpha+1)dx \wedge dy = 0;$

7) daraus folgt; α=*-1,* β=*-1;*

$$d\xi=-dx-dy. \tag{5.8}$$

N=0<Q. Das system (5.6) ist nicht in Involution. Für das prolongiertes System (5.6), (5.8), daβ voll integrabilles ist, wir haben

$$\xi = -x - y + C_1,\ \ d\eta_1 = (C_1 - x)dx,\ \ d\eta_2 = (C_1 - y)dy. \tag{5.9}$$

Daraus folgt:

$$\eta_1 = C_1 x - \frac{x^2}{2} + C_2,\ \ \eta_2 = C_1 y - \frac{y^2}{2} + C_3. \tag{5.10}$$

wo C_1, C_2, C_3 die beliebige Konstanten sind.

Als unbekannte Funktion u kann man eine beliebige Funktion $f(x,y)$ nehmen:

$$u=f(x,y). \tag{5.11}$$

Aus (5.5) folgt:

$$\begin{gathered} v = -x - y - f(x,y) + C_1,\quad z = \frac{x^2}{2} + xf(x,y) + xy + C_2, \\ t = C_1 y - \frac{y^2}{2} - yf(x,y) + C_3. \end{gathered} \tag{5.12}$$

Das ist die gemeinsame Lösung des Systems (5.3), der wir mit Hilfe der Reduzierung der Veränderlichen erhielten.

Bibliografie (in russische Sprache)

1. *Картан Э.* Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М., 1962.

2. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. М.;Л., 1948.

3. *Малаховский В. С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

В.С. Малаховский

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КАТРАНА К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Дано краткое изложение применения метода внешних форм Картана к решению вполне интегрируемых и не вполне интегрируемых систем уравнений Пфаффа. Рассмотрены конкретные примеры таких систем с решением в квадратурах.