ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 521.13

А. Б. Афонасьева, А. А. Зайцев

ВЛИЯНИЕ СИЛЫ КОРИОЛИСА НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ ДЛИННЫХ МОРСКИХ ВОЛН

Изучено влияние силы Кориолиса на особенности формирования и распространения вынужденных морских волн. Рассмотрена генерация длинных волн сосредоточенным монохроматическим источником. Исследованы два случая — низкочастотных и высокочастотных волн.

The influence of the Coriolis force on the peculiarities of the formation and propagation of forced sea waves is studied. The generation of long waves by a focused monochromatic source is observed. Two cases — the low frequency and high frequency waves are investigated.

Ключевые слова: сила Кориолиса, геострофическое течение, длинные волны, фундаментальное решение, преобразование Фурье.

Key words: Coriolis force, geostrophic flow, long wave, the fundamental solution, the Fourier transform.

Введение

Вращение Земли существенно влияет на мезо- и крупномасштабные явления в морях и океанах. В частности, оно ведет к образованию инерционных волн, геострофических течений и одного из наиболее интересных видов краевых волн — волн Кельвина в прибрежной зоне. Цель данной работы — изучить вопрос о *влиянии силы Кориолиса на распространение вынужденных длинных волн*. Делается акцент на проблему формирования геострофического течения.

Свободные волны и геострофическое течение

Система уравнений длинных морских волн с учетом силы Кориолиса имеет следующий вид [1]:

$$u_t - fv + g\eta_x = 0, \; v_t + fu + g\eta_y = 0, \; \eta_t + h(u_x + v_y) = 0; \tag{1}$$

здесь x, y — горизонтальные координаты, t — время, u, v — горизонтальные компоненты скорости частиц жидкости, η — уровень свободной поверхности, f — параметр Кориолиса, g — ускорение свободного падения, h — глубина моря (или океана).

Рассмотрим свободные синусоидальные волны в безграничном море. Используя для них комплексное представление, будем иметь

$$\eta = \eta_0 \exp(i\theta), \; u = u_0 \exp(i\theta), \; v = v_0 \exp(i\theta), \; \theta = \omega t - kx - ly. \tag{2}$$

После подстановки выражений (2) в уравнения (1) и сокращения на общий множитель получаем матричное уравнение

$$AH = 0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -gik & i\omega & -f \\ -gil & f & i\omega \\ i\omega & -ikh & -ilh \end{pmatrix}, \; H = (\eta_0, u_0, v_0)^T.$$

Условием существования волновых решений является соотношение

$$\det A = -i\omega\left(\omega^2 - f^2 - c^2(k^2 + l^2)\right) = 0, \tag{3}$$

здесь $c = \sqrt{gh}$ — скорость длинных волн в отсутствие силы Кориолиса. Поскольку для волн $\omega \neq 0$, то из уравнения (3) следует, что для частоты свободных длинных волн, которые находятся под влиянием силы Кориолиса, имеет место равенство

$$\omega = \sqrt{f^2 + c^2 (k^2 + l^2)} .$$

Вторым типом движений в океане являются стационарные течения. Поскольку в этом случае

$$\eta_t = 0 , \; u_t = 0 , \; v_t = 0 ,$$

то система уравнений (1) упрощается и принимает вид

$$- fv + g\eta_x = 0 , \; fu + g\eta_y = 0 , \; u_x + v_y = 0 . \qquad (4)$$

Из первых двух уравнений системы (4) находим

$$u = -\frac{g}{f}\eta_y , \; v = \frac{g}{f}\eta_x . \qquad (5)$$

Третье уравнение автоматически удовлетворяется этими выражениями.

Формулы (5) описывают геострофическое течение [2]. Оно является вихревым; для завихренности σ имеет место выражение

$$\sigma = v_x - u_y = \frac{g}{f}\Delta\eta . \qquad (6)$$

В том случае, когда уровень зависит только от расстояния r до некоторой фиксированной точки (центра течения), радиальная скорость геострофического течения равна 0, а для тангенциальной справедливо равенство

$$v_\tau = \frac{g}{f}\eta'(r) .$$

Из него следует, что центральная область циклона представляет собой углубление, а центр антициклона является возвышением.

Особенности распространения вынужденных длинных волн в безграничном море

Рассмотрим генерацию длинных волн сосредоточенным монохроматическим источником, считая, что начало системы координат совмещено с положением источника. Тогда первые два уравнения системы (1) останутся прежними, а третье принимает вид

$$\eta_t + h(u_x + v_y) = QH(t)\exp(i\omega t)\delta(x, y) . \qquad (7)$$

Здесь Q — объемный расход источника, функция Хэвисайда $H(t)$ указывает, что источник начал действовать в момент времени $t = 0$. Предполагается, что до этого момента движения отсутствовали.

Замечание. Мы снова пользуемся комплексным представлением решения. Согласно этому представлению Q может быть комплексной величиной, включающей начальную фазу переменного дебита источника. Принято выделять жесткий (Q — действительная величина) и мягкий (Q — мнимая величина) режимы включения. Физический смысл имеют действительная и мнимая части решения.

Из первых двух уравнений системы (1) находим

$$u_{tt} + f^2 u = -g(\eta_{xt} + f\eta_y) , \; v_{tt} + f^2 u = -g(\eta_{yt} - f\eta_x) . \qquad (8)$$

Действуя далее оператором $\partial_t^2 + f^2$ на обе части уравнения (7) и пользуясь равенствами (8), получаем следующее уравнение для уровня:

$$\eta_{tt} + f^2\eta - c^2(\eta_{xx} + \eta_{yy}) = QF(t)\delta(x, y) \qquad (9)$$

где

$$F(t) = \delta(t) + \frac{1}{i\omega}H(t)\left[(f^2 - \omega^2)\exp(i\omega t) - f^2\right] .$$

Обозначим $E(x,y,t)$ — фундаментальное решение уравнения (9). Тогда решение этого уравнения выразится сверткой по t фундаментального решения с функцией $QF(t)$ [3]. Для определения фундаментального решения, которое подчиняется уравнению

$$E_{tt}+f^2E-c^2(E_{xx}+E_{yy})=\delta(x,y,t),$$

используем двойное преобразование Фурье по пространственным переменным. Тогда для изображения получим уравнение

$$\ddot{\bar{E}}+\omega^2\bar{E}=\delta(t),\ \omega^2=f^2+c^2(k^2+l^2),$$

где k, l — параметры преобразования. Его решение имеет вид

$$\bar{E}=\frac{H(t)\sin(\omega t)}{\omega}.$$

Выполняя обратное преобразование Фурье и переходя в подынтегральном выражении к полярным координатам, получаем с помощью таблиц интегральных преобразований [4] (эти таблицы также будут использованы при получении формул (11), (13),(14)):

$$E=\frac{H(t)}{4\pi^2}\int\limits_{R^2}\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\exp(-i(kx+ly))\,dkdl=$$

$$=\frac{H(t)}{4\pi^2}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}\rho\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\exp(-i\rho r\cos\theta)\,d\theta d\rho=$$

$$=\frac{H(t)}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\rho\frac{\sin(\omega t)}{\omega}J_0(\rho r)\,d\rho=\frac{H(ct-r)\cos\left(f\sqrt{c^2t^2-r^2}/c\right)}{2\pi c\sqrt{c^2t^2-r^2}}.$$

Таким образом, для фундаментального решения имеет место формула

$$E(x,y,t)=E(r,t)=\frac{H(ct-r)\cos\left(f\sqrt{c^2t^2-r^2}/c\right)}{2\pi c\sqrt{c^2t^2-r^2}},\ r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Решение уравнения (9) имеет вид свертки

$$\eta=QF(t)*E(r,t). \qquad (10)$$

Анализ показывает, что его можно разложить на две составляющих. Из них первой будет переходной режим, затухающий обратно пропорционально времени и особого интереса не представляющий, а второй — установившийся режим; он получается из формулы (10) предельным переходом при $t\to+\infty$. В свою очередь, установившийся режим складывается из двух движений. Первым из них будет геострофическое течение, а вторым — распространяющиеся двумерные волны с периодом $T=2\pi/\omega$. Для геострофического течения будем иметь

$$\eta_g=-\frac{f^2Q}{i\omega}\int\limits_0^{+\infty}E(r,t)\,dt=-\frac{f^2Q}{2\pi i\omega c}\int\limits_{r/c}^{+\infty}\cos\left(f\sqrt{c^2t^2-r^2}/c\right)dt=$$

$$=-\frac{f^2Q}{2\pi i\omega c^2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos(ft/c)}{\sqrt{t^2+r^2}}\,dt=-\frac{f^2Q}{2\pi i\omega c^2}K_0\left(\frac{fr}{c}\right),$$

то есть

$$\eta_g=-\frac{f^2Q}{2\pi i\omega c^2}K_0\left(\frac{fr}{c}\right). \qquad (11)$$

Подставляя этот результат в формулу (6) и учитывая, что при $r\neq 0$ функция $K_0(fr/c)$ удовлетворяет равенству

$$\Delta K_0\left(\frac{fr}{c}\right)=-\frac{f^2}{c^2}K_0\left(\frac{fr}{c}\right),$$

получаем для завихренности в геострофическом течении следующее значение:

$$\sigma_g = -\frac{g f^3 Q}{2\pi i \omega c^4} K_0\left(\frac{fr}{c}\right).$$

Отметим, что в случае жесткого включения источника (см. *замечание*) после овеществления выражения (11) получаем $\eta_g = 0$. Таким образом, при жестком включении геострофическое течение не появляется. С другой стороны, это течение будет иметь максимальную интенсивность при мягком включении.

Для распространяющихся волн аналогичный анализ дает следующий результат:

$$\eta_w = \frac{(f^2 - \omega^2) Q}{2\pi i \omega c} \exp(i\omega t) \int_{r/c}^{+\infty} \frac{\exp(-i\omega t_0) \cos\left(f\sqrt{c^2 t_0^2 - r^2}\big/c\right)}{\sqrt{c^2 t_0^2 - r^2}} dt_0 ,$$

или после замены переменной интегрирования

$$\eta_w = \frac{(f^2 - \omega^2) Q}{2\pi i \omega c^2} \exp(i\omega t) \int_0^{+\infty} \frac{\exp\left(-i\omega\sqrt{\tau^2 + r^2}\big/c\right) \cos(f\tau/c)}{\sqrt{\tau^2 + r^2}} d\tau . \qquad (12)$$

Здесь следует рассмотреть два случая.

Случай низкочастотных волн, $\omega < f$. В этом случае формула (12) приводится к следующей:

$$\eta_w = \frac{(f^2 - \omega^2) Q}{2\pi i \omega c^2} \exp(i\omega t)\, K_0\left(\frac{\sqrt{f^2 - \omega^2}\, r}{c}\right). \qquad (13)$$

Соответствующие движения являются колебательными по времени; при этом возникает циркуляционное течение вокруг источника. Формула (13) имеет сходство с формулой (11), если не принимать во внимание экспоненциальный множитель. Поэтому данное движение естественно назвать *квазигеострофическим*. В отличие от геострофического течения это движение возникает даже при жестком включении источника.

Случай низкочастотных волн, $\omega > f$. В этом случае вычисление интеграла в формуле (13) приводит к следующему результату:

$$\eta_w = \frac{(f^2 - \omega^2) Q}{4\omega c^2} \exp(i\omega t)\, H_0^{(2)}\left(\frac{\sqrt{\omega^2 - f^2}\, r}{c}\right).$$

Это выражение описывает цилиндрические волны, бегущие от источника в бесконечность. Их длина равна $L = 2\pi c\Big/\sqrt{\omega^2 - f^2}$, а скорость распространения

$$c_0 = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - f^2}} > c ,$$

то есть больше скорости длинных волн $c = \sqrt{gh}$. Отметим, что в том случае, когда частота источника близка к инерционной частоте, скорость цилиндрических волн значительно возрастает.

Заключение

Рассмотрена проблема о влиянии силы Кориолиса на особенности формирования и распространения вынужденных морских волн. Показано, что после затухания переходного движения формируется установившийся режим, получающийся сложением двух составляющих — геострофического течения и колебательных движений. В случае низкочастотных колебаний вторая составляющая представляет собой квазигеострофическое движение, а в случае высокочастотных колебаний она является распространяющейся цилиндрической волной. Геострофическое течение не появляется в случае жесткого включения источника и имеет максимальную интенсивность в случае мягкого включения.

Список литературы

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., 1977.
2. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика. М., 1984.
3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М., 1973.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. М., 1969. Т. 1, 2.

Об авторах

А. А. Зайцев — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., РГУ им. И. Канта.
А. Б. Афонасьева — асп., РГУ им. И. Канта, kosharik87@gmail.com

Authors

A. A. Zaitsev — Dr., IKSUR.
A. Afonas`eva — PhD student, IKSUR.