Список литературы

1. *Yano K., Isihara S.* Tangent and Cotangent Bundles Differential Geometry. N. Y., 1973.

N. Nikitin, O. Nikitina

Infinitesimal affine transformation of the tangent bundle of space nonlinear connection

It is shown that a complete elevator X^C for infinitesimal transformation X of differentiable manifold M leaves invariant affine connection of tangent bundle $T(M)$ of space with non-linear connection if and only if the vector field X is the infinitesimal movement in space of non-linear connection.

УДК 514.75

К. В. Полякова

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Задание аффинной связности с помощью горизонтальных векторов

Найдены контравариантные уравнения аффинной связности и выражения скобок Ли.

***Ключевые слова*:** линейная связность, горизонтальные векторы, ковариантные производные.

Продолжается изучение горизонтальных векторов, начатое в работах [5], [6].

1. *Пфаффовы производные и скобки Ли.* Структурные уравнения расслоения $L(X_m)$ касательных линейных реперов на гладком многообразии X_m имеют вид

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j\,,\ d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}\,, \tag{1}$$

причем

$$d\omega^i_{jk} = \omega^l_{jk} \wedge \omega^i_l - \omega^i_{lk} \wedge \omega^l_j - \omega^i_{jl} \wedge \omega^l_k + \omega^l \wedge \omega^i_{jkl}\,, \tag{2}$$

где $\omega^i_{[\,jk\,]} \equiv 0 \pmod{\omega^i}$; $i, j, k,... = \overline{1,m}$. Выражение для дифференциала точки $A \in L(X_m)$ запишем в виде

$$dA = \omega^i e_i + \omega^i_j e^j_i\,. \tag{3}$$

Совокупность векторов 1-го порядка $e = \left\{ e_i, e^k_j \right\}$ образует репер касательного пространства $T_{m+m^2} = [e_i, e^k_j]$ к расслоению $L(X_m)$ в точке A, двойственный к кореперу $\omega = \left\{\omega^i, \omega^j_i\right\}$, то есть [4, с. 120]

$$\omega^i(e_j) = \delta^i_j,\ \omega^i(e^k_j) = 0,\ \omega^i_j(e_k) = 0,\ \omega^i_j(e^k_l) = \delta^i_l\delta^k_j. \tag{4}$$

Вполне интегрируемая система уравнений $\omega^i = 0$ фиксирует точку многообразия X_m и, следовательно, слой расслоения $L(X_m)$. Таким образом, касательное пространство T_{m+m^2} содержит вертикальное пространство $T_{m^2} = [e^j_i]$, касательное к слою в точке A.

Векторы e_i, e^k_j удовлетворяют уравнениям [5]

$$de_i - e_j\omega^j_i - e^j_k\omega^k_{ji} = e_{ij}\omega^j + e^{\ k}_{ij}\omega^j_k\,, \tag{5}$$

$$de^j_i + e^k_i\omega^j_k = e^j_{ik}\omega^k + e^{jl}_{ik}\omega^k_l\,, \tag{6}$$

причем для совокупности векторов 2-го порядка $e' = \left\{ e_{ij}, e^k_{ij}, e^j_{ik}, e^{jl}_{ik} \right\}$ имеем

$$e_{ij} = e_{ji}\,,\ e^{\ k}_{ij} = e^k_{ji}\,,\ e^{jl}_{ik} = e^{lj}_{ki}\,. \tag{7}$$

Они удовлетворяют сравнениям по модулю базисных и слоевых форм ω^i, ω^i_j расслоения $L(X_m)$

$$de_{ij} \cong e_{il}^k \omega_{kj}^l + e_k \omega_{ij}^k + e_{kj}^l \omega_{li}^k + e_k^l \omega_{lij}^k ,$$
$$de_{ij}^k \cong e_{sj}^{lk} \omega_{li}^s + e_l^k \omega_{ji}^l , \tag{8}$$
$$de_{ik}^{jl} \cong 0 .$$

Перепишем уравнения (5), (6) следующим образом:

$$de_i - e_k^j \omega_{ji}^k = \hat{e}_{ij} \omega^j + \hat{e}_{ij}^{\,k} \omega_k^j , \tag{9}$$

$$de_i^j = \hat{e}_{ik}^j \omega^k + \hat{e}_{ik}^{jl} \omega_l^k , \tag{10}$$

где

$$\hat{e}_{ij} = e_{ij} , \ \hat{e}_{ik}^j = e_{ik}^j \tag{11}$$

— базисные пфаффовы производные;

$$\hat{e}_{ij}^{\,k} = e_{ij}^{\,k} + \delta_i^k e_j , \ \hat{e}_{ik}^{jl} = e_{ik}^{jl} - \delta_k^j e_i^l \tag{12}$$

— слоевые пфаффовы производные.

Таким образом, из векторов репера 2-го порядка $e^2 = \{e, e'\}$ с условиями симметрии (7) построена новая совокупность векторов 2-го порядка $\hat{e}' = \{\hat{e}_{ij}, \hat{e}_{ik}^j, \hat{e}_{ij}^{\,k}, \hat{e}_{ik}^{jl}\}$ с условиями симметрии (7_1), которые назовем *адаптированными пфаффовыми производными*.

Теорема 1. *Альтернации адаптированных пфаффовых производных $\hat{e}'$ являются скобками Ли векторов e.*

Доказательство. Базисные и слоевые пфаффовы производные $\hat{e}'$ будем считать производными по направлению невертикальных векторов e_i и вертикальных векторов e_i^j, то есть

$$\begin{aligned} &\hat{e}_{ij} = \partial_{e_j} e_i, \ \hat{e}_{ik}^j = \partial_{e_k} e_i^j, \\ &\hat{e}_{ij}^{\,k} = \partial_{e_j^k} e_i, \ \hat{e}_{ik}^{jl} = \partial_{e_k^l} e_i^j . \end{aligned} \tag{13}$$

Действительно, используя обозначения (11)—(13), получим

$$[e_i, e_j] = \partial_{e_i} e_j - \partial_{e_j} e_i = \hat{e}_{ji} - \hat{e}_{ij} = 0,$$

$$[e_j^i, e_k] = \partial_{e_j^i} e_k - \partial_{e_k} e_j^i = \hat{e}_{ki}^{\,j} - \hat{e}_{ik}^j = \delta_k^i e_j ,$$

$$[e_i^j, e_k^l] = \partial_{e_i^j} e_k^l - \partial_{e_k^l} e_i^j = \delta_l^i e_j^k - \delta_j^k e_l^i .$$

Для введенных скобок

$$[e_i, e_j] = 0,\ [e^i_j, e_k] = \delta^i_k e_j,\ [e^j_i, e^l_k] = \delta^i_l e^k_j - \delta^k_j e^i_l \qquad (14)$$

легко доказываются тождества Якоби в следующих четырех возможных случаях:

$$[[e_i, e_j], e_k] + [[e_j, e_k], e_i] + [[e_k, e_i], e_j] = 0,$$

$$[[e^i_j, e_k], e_l] + [[e_k, e_l], e^i_j] + [[e_l, e^i_j], e_k] = 0,$$

$$[[e^i_j, e^k_l], e_s] + [[e^k_l, e_s], e^i_j] + [[e_s, e^i_j], e^k_l] = 0,$$

$$[[e^i_j, e^k_l], e^s_t] + [[e^k_l, e^s_t], e^i_j] + [[e^s_t, e^i_j], e^k_l] = 0\ .$$

Замечание 1. Рассматривая dA как линейное преобразование [8, с. 83] касательного пространства $TL(X_m)$, с помощью соотношений (4) получим (естественные сточки зрения аппарата исследования) равенства

$$dA(e_i) = e_i,\ dA(e^j_i) = e^j_i\ .$$

Аналогично, для линейных преобразований de пространства $TTL(X_m) = T^2L(X_m)$ имеем

$$de_i(e_j) = \hat{e}_{ij},\ de_i(e^k_j) = \hat{e}_{ij}^{\ k},\ de^j_i(e_k) = \hat{e}^j_{ik},\ de^j_i(e^l_k) = \hat{e}^{jl}_{ik}\ . \qquad (15)$$

Действительно, например,

$$de_i(e_j) = \hat{e}_{ik} \underbrace{\omega^k(e_j)}_{\delta^k_j} + \hat{e}_{ik}^{\ l} \underbrace{\omega^k_l(e_j)}_{0} - e^l_k \underbrace{\omega^k_{li}(e_j)}_{0} = \hat{e}_{ij}\ .$$

Таким образом, векторы из $\hat{e}'$ являются:

1) адаптированными пфаффовыми производными векторов из репера e;

2) производными векторов из репера e по их направлениям, то есть $\partial_e e = \hat{e}'$;

3) образами векторов из репера e при отображениях de, то есть $de(e) = \hat{e}'$.

2. Тождества Бианки. Зададим связность в расслоении $L(X_m)$ касательных линейных реперов способом Лаптева — Лумисте с помощью форм

$$\tilde{\omega}_j^i = \omega_j^i - \Gamma_{jk}^i \omega^k, \tag{16}$$

$$\Delta\Gamma_{jk}^i + \omega_{jk}^i = \Gamma_{jkl}^i \omega^l. \tag{17}$$

Внося в уравнения (1) формы (16), получим [2, с. 186; 3, с. 237]

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \tilde{\omega}_j^i + \theta^i, \; d\tilde{\omega}_j^i = \tilde{\omega}_j^k \wedge \tilde{\omega}_k^i + \Omega_j^i, \tag{18}$$

где

$$\theta^i = \tfrac{1}{2} T_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^j, \; \Omega_j^i = \tfrac{1}{2} R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l \tag{19}$$

— формы кручения и кривизны.

Дифференцируя уравнения (18) внешним образом, найдем тождества Бианки в бескоординатном представлении [2, с. 187]

$$D\theta^i = \Omega_j^i \wedge \omega^j, \; D\Omega_j^i = 0, \tag{20}$$

где D — символ внешнего ковариантного дифференциала [3, с. 211]

$$D\theta^i = d\theta^i + \theta^j \wedge \tilde{\omega}_j^i, \; D\Omega_j^i = d\Omega_j^i + \Omega_j^k \wedge \tilde{\omega}_k^i - \Omega_k^i \wedge \tilde{\omega}_j^k.$$

Далее, нам понадобятся тождества Бианки в координатном представлении [3, с. 257—258]

$$\begin{gathered} R_{\{jkl\}}^i - \nabla_{\{l} T_{jk\}}^i - T_{s\{j}^i T_{kl\}}^s = 0, \\ \nabla_{\{s} R_{|j|kl\}}^i + R_{jt\{s}^i T_{kl\}}^t = 0, \end{gathered} \tag{20$'$}$$

где ∇ — символ ковариантного дифференцирования; $\{\ldots\}$ — циклирование.

Объект $\{\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jkl}^i\}$ назовем продолжением 2-го порядка аффинной связности, причем

$$d\Gamma_{jkl}^i + \Gamma_{jk}^s \omega_{sl}^i - \Gamma_{sk}^i \omega_{jl}^s - \Gamma_{js}^i \omega_{kl}^s + \omega_{jkl}^i \cong 0 .$$

Уравнения на тензоры T^i_{jk} и R^i_{jkl} запишем в виде

$$dT^i_{jk} = T^i_{jkl}\omega^l + T^{i\ s}_{jkl}\omega^l_s, \ dR^i_{jkl} = R^i_{jkls}\omega^s + R^{i\ t}_{jkls}\omega^s_t,$$

где

$$T^{i\ s}_{jkl} = -\delta^i_s T^l_{jk} + \delta^l_j T^i_{sk} + \delta^l_k T^i_{js}, \qquad (21)$$
$$R^{i\ t}_{jkls} = -\delta^i_s R^t_{jkl} + \delta^t_j R^i_{skl} + \delta^t_k R^i_{jsl} + \delta^t_l R^i_{jks}$$

— слоевые пфаффовы производные.

3. Горизонтальные векторы. Внося формы (16) в деривационную формулу (3), получим

$$dA - \tilde{\omega}^i_j e^j_i = \omega^k \nabla_k A,$$

где

$$\nabla_k A = e_k + \Gamma^i_{jk} e^j_i.$$

Векторы $E_k = \nabla_k A$ назовем горизонтальными.

Внося формы (16) в уравнения (6) для вертикальных векторов e^j_i, получим $\nabla e^j_i = \omega^k \nabla_k e^j_i$, где

$$\nabla e^j_i = de^j_i + e^k_i \tilde{\omega}^j_k - e^{jl}_{ik}\tilde{\omega}^k_l,$$
$$\nabla_k e^j_i = e^j_{ik} - e^l_i \Gamma^j_{lk} + e^{js}_{il}\Gamma^l_{sk}, \qquad (22)$$

причем справедливы сравнения $\Delta\nabla_k e^j_i \cong 0$.

Дифференциалы горизонтальных векторов $E_k = \nabla_k A$ приведем к виду

$$dE_k = E_i\omega^i_k + e^j_i(d\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk}) + \omega^j(e_{kj} + e^l_{ij}\Gamma^i_{lk}) + \qquad (23)$$
$$+\omega^i_j(e^{\ j}_{ki} + e^{sj}_{li}\Gamma^l_{sk} - e^j_l\Gamma^l_{ik} - \delta^j_k e^s_l \Gamma^l_{si}).$$

Подставим в равенство (23) выражения векторов $e^j_{ik} = e^{\ j}_{ki}$ из обозначения (22):

$$dE_k = E_i\omega^i_k + e^j_i(\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk}) + \omega^i_j\nabla_k e^{\ j}_i + \omega^j(e_{kj} + e^l_{ij}\Gamma^i_{lk}). \qquad (24)$$

Из (24) следуют уравнения (17) и

$$dE_k = E_i\omega_k^i + \omega^l E_{kl} + \omega_j^i \nabla_k e_i^j, \tag{25}$$

где

$$E_{kl} = e_{kl} + e_i^j \Gamma_{jkl}^i + e_{il}^j \Gamma_{jk}^i,$$

причем

$$E_{[kl]} = R_{jkl}^i e_i^j + \Gamma_{j[k}^i \nabla_{l]} e_i^j.$$

Выражение (25) запишем в виде

$$dE_k = E_{kl}\omega^l + E_{ki}^{\ \ j}\omega_j^i, \tag{25′}$$

где

$$E_{ki}^{\ \ j} = \nabla_k e_i^j + \delta_k^i E_j \tag{26}$$

— слоевые пфаффовы производные горизонтальных векторов.

Замечание 2. При отображении dE_k имеют место равенства

$$dE_k(e_l) = E_{kl},\ dE_k(e_j^i) = E_{kj}^{\ \ i}.$$

4. Контравариантные уравнения связности. Внешние дифференциалы форм $\widetilde{\omega}_{jk}^i = \omega_{jk}^i - L_{jkl}^i \omega^l$ имеют вид

$$d\widetilde{\omega}_{jk}^i = \widetilde{\omega}_{jk}^l \wedge \widetilde{\omega}_l^i - \widetilde{\omega}_{lk}^i \wedge \widetilde{\omega}_j^l - \widetilde{\omega}_{jl}^i \wedge \widetilde{\omega}_k^l +$$
$$+ \omega^l \wedge (\Delta L_{jkl}^i - \Gamma_{sl}^i \omega_{jk}^s + \Gamma_{jl}^s \omega_{sk}^i + \Gamma_{kl}^s \omega_{js}^i + \omega_{jkl}^i) +$$
$$+ (L_{jkl}^t \Gamma_{ts}^i - L_{tkl}^i \Gamma_{js}^t - L_{jtl}^i \Gamma_{ks}^t)\omega^l \wedge \omega^s,$$

откуда по теореме Картана — Лаптева

$$\Delta L_{jkl}^i - \Gamma_{sl}^i \omega_{jk}^s + \Gamma_{jl}^s \omega_{sk}^i + \Gamma_{kl}^s \omega_{js}^i + \omega_{jkl}^i \equiv 0.$$

Объект $\overset{2}{\Gamma} = \{\Gamma_{jk}^i, L_{jkl}^i\}$ — объект аффинной связности 2-го порядка.

Внесем формы аффинной связности 2-го порядка $\overset{2}{\Gamma}$ в уравнения (5). Получим $\nabla^2 e_i = \omega^j \nabla^2{}_j e_i$, где

$$\nabla^2 e_i = de_i - e_j\tilde{\omega}_i^j - e_k^j\tilde{\omega}_{ji}^k - e_{ij}^{\ k}\tilde{\omega}_k^j ,$$
$$\nabla^2{}_j e_i = e_{ij} + e_{il}^{\ k}\Gamma_{kj}^l + e_k\Gamma_{ij}^k + e_k^l L_{lij}^k , \tag{27}$$

причем справедливы сравнения $d\nabla^2{}_j e_i \cong \nabla^2{}_j e_k^l \omega_{li}^k$.

Замечание 3. Внося формы (16) в уравнения (5), получим $\nabla^1 e_i = \omega^j \nabla^1{}_j e_i$, где

$$\nabla^1 e_i = de_i - e_j\tilde{\omega}_i^j - e_k^j\omega_{ji}^k - e_{ij}^{\ k}\tilde{\omega}_k^j ,$$
$$\nabla^1{}_j e_i = e_{ij} + e_{il}^{\ k}\Gamma_{kj}^l + e_k\Gamma_{ij}^k , \tag{27′}$$

причем

$$d\nabla^1{}_j e_i \cong \omega_{li}^k \nabla^1{}_j e_k^l + (\omega_{lij}^k + \Gamma_{ij}^s\omega_{ls}^k)e_k^l .$$

Посредством формы аффинной связности 2-го порядка $\overset{2}{\Gamma}$ в уравнениях (17), получим $\nabla^2\Gamma_{jk}^i = \omega^l \nabla^2{}_l\Gamma_{jk}^i$, где

$$\nabla^2\Gamma_{jk}^i = d\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jk}^l\tilde{\omega}_l^i - \Gamma_{lk}^i\tilde{\omega}_j^l - \Gamma_{jl}^i\tilde{\omega}_k^l + \tilde{\omega}_{jk}^i ,$$
$$\nabla^2{}_l\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jkl}^i - \Gamma_{jk}^s\Gamma_{sl}^i + \Gamma_{sk}^i\Gamma_{jl}^s + \Gamma_{js}^i\Gamma_{kl}^s - L_{jkl}^i . \tag{28}$$

Выражение

$$\nabla_l E_k = \nabla_l(e_k + e_i^j\Gamma_{jk}^i) = \nabla_l e_k + \Gamma_{jk}^i\nabla_l e_i^j + e_i^j\nabla_l\Gamma_{jk}^i$$

с учетом обозначений (27), (22), (28) принимает вид

$$\nabla^2{}_l E_k = e_{kl} + e_{ki}^{\ j}\Gamma_{jl}^i + e_i\Gamma_{kl}^i + e_{il}^j\Gamma_{jk}^i + e_{ir}^{js}\Gamma_{sl}^r\Gamma_{jk}^i + \\ + e_i^j(\Gamma_{jkl}^i - \Gamma_{jk}^s\Gamma_{sl}^i + \Gamma_{js}^i\Gamma_{kl}^s) . \tag{29}$$

Альтернируя выражение (29), получим

$$\nabla_{[l}\nabla_{k]}A = \nabla_{[l}E_{k]} = T_{kl}^i E_i + R_{jkl}^i e_i^j . \tag{30}$$

Уравнения (30) называются контравариантными уравнениями связности [3, с. 243].

Утверждение. *Тензоры кручения* T_{kl}^i *и кривизны* R_{jkl}^i *являются горизонтальной и вертикальной составляющими аль-*

тернированных ковариантных производных горизонтальных векторов [1, с. 121].

Рассмотрим адаптированный репер $\{e^i_j, E_k\}$, найдем таблицу умножения для вертикальных e^i_j и горизонтальных E_k векторов. Для векторов e^i_j найдено соотношение (14_3) [3, с. 243].

Теорема 2. *Ковариантные производные векторов адаптированного репера* $\{e^i_j, E_k\}$ *являются производными по направлению горизонтальных векторов, то есть*

$$\nabla_k e^i_j = \partial_{E_k} e^i_j\,,\ \nabla^1{}_j e_i = \partial_{E_j} e_i\,,\ \nabla_l E_k = \partial_{E_l} E_k\,. \tag{31}$$

Доказательство. Для левой и правой частей равенства (31_1) имеем

1) $\nabla_k e^i_j \overset{(22)}{=} e^i_{jk} - e^l_j \Gamma^i_{lk} + e^{il}_{js}\Gamma^s_{lk}$;

2) $\partial_{E_k} e^i_j = \partial_{e_k + e^s_l \Gamma^l_{sk}} e^i_j = \partial_{e_k} e^i_j + \Gamma^l_{sk}\partial_{e^s_l} e^i_j \overset{(13)}{=} \hat{e}^i_{jk} + \hat{e}^{is}_{jl}\Gamma^l_{sk} \overset{(11,12)}{=}$

$$= e^i_{jk} - e^l_j \Gamma^i_{lk} + e^{il}_{js}\Gamma^s_{lk}\,.$$

Для левой и правой частей равенства (31_2) имеем

1) $\nabla^1{}_j e_i \overset{(27')}{=} e_{ij} + e_{il}^{\ k}\Gamma^l_{kj} + e_k \Gamma^k_{ij}$;

2) $\partial_{E_j} e_i = \partial_{e_j + e^l_k \Gamma^k_{lj}} e_i \overset{(13)}{=} \hat{e}_{ij} + \Gamma^k_{lj}\hat{e}_{ik}^{\ l} \overset{(11,12)}{=}$

$$= e_{ij} + \Gamma^k_{lj}(e_{ik}^{\ l} + \delta^l_i e_k) = e_{ij} + e_{il}^{\ k}\Gamma^l_{kj} + e_k\Gamma^k_{ij}\,.$$

Аналогично доказывается равенство (31_3).

Учитывая равенства (31), имеем [3, с. 243; 1, с. 131]

$$[e^i_j, E_k] = \delta^i_k E_j\,, \tag{32}$$

а контравариантные уравнения (30) принимают вид

$$\frac{1}{2}[E_l, E_k] = T^i_{kl} E_i + R^i_{jkl} e^j_i . \qquad (33)$$

Теорема 3. *Для операции* [,], *определяемой равенствами (32), (33), выполняются тождества Якоби.*

Доказательство. Рассмотрим 1-е тождество

$$[[e^i_j, e^k_l], E_s] + [[e^k_l, E_s], e^i_j] + [[E_s, e^i_j], e^k_l] = 0 . \qquad (34)$$

Оно доказывается легко с помощью выражений (14), (32). Докажем 2-е тождество:

$$[[e^i_j, E_k], E_l] + [[E_l, e^i_j], E_k] + [[E_k, E_l], e^i_j] = 0 . \qquad (35)$$

Преобразуем левую часть тождества (35) с помощью соотношений (32), (33)

$$\delta^i_k [E_j, E_l] - \delta^i_l [E_j, E_k] - [T^s_{kl} E_s + R^t_{skl} e^s_t, e^i_j] =$$
$$= -\delta^i_k (T^s_{jl} E_s + R^t_{sjl} e^s_t) + \delta^i_l (T^s_{jk} E_s + R^t_{sjk} e^s_t) - T^s_{kl} \partial_{E_s} e^i_j -$$
$$- R^t_{skl} \partial_{e^s_t} e^i_j + \partial_{e^i_j} (T^s_{kl} E_s + R^t_{skl} e^s_t) =$$
$$= (-\delta^i_k T^s_{jl} + \delta^i_l T^s_{jk}) E_s + (-\delta^i_k R^t_{sjl} + \delta^i_l R^t_{sjk}) e^s_t - T^s_{kl} [E_s, e^i_j] -$$
$$- R^t_{skl} [e^s_t, e^i_j] + E_s \partial_{e^i_j} T^s_{kl} + e^s_t \partial_{e^i_j} R^t_{skl} =$$
$$= (-\delta^i_k T^s_{jl} + \delta^i_l T^s_{jk}) E_s + (-\delta^i_k R^t_{sjl} + \delta^i_l R^t_{sjk}) e^s_t - T^i_{kl} E_j -$$
$$- R^t_{skl} (\delta^s_j e^i_t - \delta^i_t e^s_j) + E_s T^{s\,i}_{klj} + e^s_t R^{t\,i}_{sklj} =$$
$$= (T^{s\,i}_{klj} - \delta^i_k T^s_{jl} + \delta^i_l T^s_{jk} + \delta^s_j T^i_{kl}) E_s +$$
$$+ (R^{t\,i}_{sklj} - \delta^i_k R^t_{sjl} + \delta^i_l R^t_{sjk} - \delta^i_s R^t_{jkl} + \delta^t_j R^i_{skl}) e^s_t \overset{(21)}{=} 0 ,$$

где

$$\partial_{e^i_j} T^s_{kl} = T^{s\,i}_{klj} , \ \partial_{e^i_j} R^t_{skl} = R^{t\,i}_{sklj}$$

— слоевые пфаффовы производные объектов кручения и кривизны, вычисляемые по формулам (21).

Перейдем к доказательству 3-го тождества

$$[[E_i, E_i], E_k] + [[E_k, E_i], E_j] + [[E_j, E_k], E_i] = 0. \qquad (36)$$

Левую часть тождества (36) преобразуем с помощью контравариантных уравнений связности (33)

$$-[T^l_{ij}E_l + R^s_{lij}e^l_s, E_k] - [T^l_{ki}E_l + R^s_{lki}e^l_s, E_j] - [T^l_{jk}E_l + R^s_{ljk}e^l_s, E_i] =$$

$$= -T^l_{ij}[E_l, E_k] - R^s_{lij}[e^l_s, E_k] + E_l\partial_{E_k}T^l_{ij} + e^l_s\partial_{E_k}R^s_{lij} -$$

$$-T^l_{ki}[E_l, E_j] - R^s_{lki}[e^l_s, E_j] + E_l\partial_{E_j}T^l_{ki} + e^l_s\partial_{E_j}R^s_{lki} -$$

$$-T^l_{jk}[E_l, E_i] - R^s_{ljk}[e^l_s, E_i] + E_l\partial_{E_i}T^l_{jk} + e^l_s\partial_{E_i}R^s_{ljk} =$$

$$= T^l_{ij}(T^s_{lk}E_s + R^t_{slk}e^s_t) - R^s_{lij}\delta^l_k E_s + E_l\nabla_k T^l_{ij} + e^l_s\nabla_k R^s_{lij} +$$

$$+ T^l_{ki}(T^s_{lj}E_s + R^t_{slj}e^s_t) - R^s_{lki}\partial^l_k E_s + E_l\nabla_j T^l_{ki} + e^l_s\nabla_j R^s_{lki} +$$

$$+ T^l_{jk}(T^s_{li}E_s + R^t_{sli}e^s_t) - R^s_{ljk}\delta^l_i E_s + E_l\nabla_i T^l_{jk} + e^l_s\nabla_i R^s_{ljk} =$$

$$= E_l(\nabla_{\{k}T^l_{ij\}} + T^l_{s\{i}T^s_{jk\}} - R^l_{\{ijk\}}) + e^l_s(\nabla_{\{k}R^s_{|l|ij\}} + R^s_{lt\{k}T^t_{ij\}}) \overset{(20')}{=} 0.$$

Замечание 4. Проальтернируем ковариантные производные (28) по k, l

$$\nabla_{[l}\Gamma^i_{jk]} = R^i_{jkl} + \Gamma^i_{js}T^s_{kl} + \Gamma^i_{s[k}\Gamma^s_{jl]} - L^i_{j[kl]}. \qquad (37)$$

На поверхности X_m в проективном пространстве P_n выполняются соотношения $T^s_{kl} = 0$, $\overset{0}{L}{}^i_{j[kl]} = \overset{0}{\Gamma}{}^i_{s[k}\overset{0}{\Gamma}{}^s_{jl]}$ и выражение (37) упрощается

$$\overset{1}{\nabla}_{[l}\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk]} = \overset{0}{R}{}^i_{jkl}, \qquad (38)$$

где нулик означает, что объект является индуцированным. Аналогично для всех компонент индуцированной фундаментально-групповой связности 1-го типа [7] $\overset{1}{\Gamma} = \{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}, \overset{1}{\Gamma}_{ij}, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{0}{\Gamma}{}^i_{aj}, \overset{1}{\Gamma}_{ai}\}$ справедливо

$$\overset{1}{\nabla}_{[k} \overset{01}{\Gamma}{}^{\cdot}_{\cdot l]} = \overset{01}{R}{}^{\cdot}_{\cdot kl} . \tag{39}$$

Для индуцированной связности 2 и 3-го типа имеем

$$\overset{3}{\nabla}_{[k} \overset{3}{\Gamma}_{j]} = 0 . \tag{40}$$

Теорема 4 [4, с. 81]. *Если* X, Y *—горизонтальные векторы, то*

$$\tilde{\omega}^i_j([X, Y]) = -\Omega^i_j(X, Y) . \tag{41}$$

Доказательство. Рассмотрим равенство (41) для базисных векторов $X = E_k$, $Y = E_l$, то есть

$$\tilde{\omega}^i_j([E_k, E_l]) = -\tfrac{1}{2} R^i_{jpq} \omega^p \wedge \omega^q (E_k, E_l) .$$

Используя контравариантные уравнения связности (33), получим

$$\tilde{\omega}^i_j(-2T^s_{kl} E_s - 2R^s_{pkl} e^p_s) =$$
$$= -\tfrac{1}{2} R^i_{jpq} 2\Big(\omega^p(E_k)\omega^q(E_l) - \omega^p(E_l)\omega^q(E_k)\Big),$$

откуда

$$-2T^s_{kl}\tilde{\omega}^i_j(E_s) - 2R^s_{pkl}\tilde{\omega}^i_j(e^p_s) = -R^i_{jpq}(\delta^p_k\delta^q_l - \delta^p_l\delta^q_k). \tag{42}$$

Легко показать, что

$$\tilde{\omega}^i_j(E_k) = 0, \tilde{\omega}^i_j(e^k_l) = \delta^i_l \delta^k_j . \tag{43}$$

Учитывая условия (43), выражение (42) принимает вид

$$-2R^s_{pkl}\delta^i_s\delta^p_j = -R^i_{jkl} + R^i_{jlk} ,$$

что доказывает теорему.

Теорема 5 [4, с. 119]. *Для форм связности* $\tilde{\omega}^i_j$, *кручения* θ^i *и кривизны* Ω^i_j *линейной связности* Γ *в расслоении* $L(X_m)$ *имеют место структурные уравнения*

$$d\omega^i(X, Y) = [\omega^j(X), \tilde{\omega}^i_j(Y)] + \theta^i(X, Y), \tag{44}$$

$$d\tilde{\omega}^i_j(X,Y)=[\tilde{\omega}^k_j(X),\tilde{\omega}^i_k(Y)]+\Omega^i_j(X,Y)\,, \qquad (45)$$

где $X,Y\in T_A L(X_m)$, $A\in L(X_m)$.

Доказательство заключается в проверке формул (44), (45), если X,Y — горизонтальные и (или) вертикальные векторы. Нам понадобится известная формула

$$d\omega(X,Y)=\partial_X\omega(Y)-\partial_Y\omega(X)-\omega([X,Y]).$$

Операция [,] определяется обычным образом

$$[\omega(X),\theta(Y)]=\omega(X)\theta(Y)-\omega(Y)\theta(X).$$

Список литературы

1. *Бишоп Р., Криттенден Р.* Геометрия многообразий. М., 1967.

2. *Зуланке Р., Винтген П.* Дифференциальная геометрия и расслоения. М., 1975.

3. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. М., 2003.

4. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии / пер. с англ. М., 1981. Т. 1.

5. *Полякова К.В.* Аналитический и геометрический способы задания аффинной связности // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2012. Вып. 43. С. 108—114.

6. *Полякова К.В., Шевченко Ю.И.* Способ Лаптева — Лумисте задания связности и горизонтальные векторы // Там же. С. 114—121.

7. *Шевченко Ю.И.* Об основной задаче проективно-дифференциальной геометрии поверхности // Там же. 1989. Вып. 20. С. 122—128.

8. *Do Carmo M.* Differential forms and applications. B. ; Heidelberg, 1994.

K. Polyakova

Giving the affine connection by means of horizontal vectors

Contravariant equations of affine connection and expressions for Lie bracket are found.