УДК 514.75

Н. А. Елисеева

(Калининградский государственный технический университет)

НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ, ИНДУЦИРУЕМЫЕ В РАССЛОЕНИИ НОРМАЛЕЙ ВТОРОГО РОДА НА Λ-ПОДРАССЛОЕНИИ H(П)-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Данная статья является продолжением работы [1]. На оснащенном в смысле Нордена — Бортолотти Λ-подрасслоении в расслоении нормалей второго рода построены 24 нормальные связности. Указаны условия совпадения некоторых из них.

В работе используется следующая система индексов: $K,P,Q=\overline{1,n}$; $\bar I,\bar K=\overline{0,n}$; $p,q,s,t,f=\overline{1,r}$; $i,j,k=\overline{r+1,m}$; $\alpha,\beta=\overline{m+1,n-1}$; $u,v,w,x=\overline{r+1,n-1}$; $\hat u,\hat v,\hat w=\overline{r+1,n}$; $\Phi=0,1$; $\Psi=\overline{0,11}$.

Пусть распределение H(Λ) (базисное Λ-подрасслоение H(П)-распределения) оснащено в смысле Нордена — Бортолотти [2; 3]. В силу наличия подмногообразия $\overline{\mathrm{H}(\Lambda)}$ [3], двойственного исходному распределению H(Λ), системам форм $\{\overset{\Phi\Psi}{\Theta}{}^{0}_{\hat u},\overset{\Phi\Psi}{\Theta}{}^{\hat v}_{\hat u}\}$, определяющим нормальные связности $\overset{\Phi\Psi}{\nabla}{}^{\perp}$ в расслоении нормалей первого рода на оснащенном в смысле Нордена — Картана H(Λ)-распределении, соответствуют двойственные [4] им системы форм $\{\overset{\Phi\Psi}{\overline{\Theta}}{}^{0}_{\hat u},\overset{\Phi\Psi}{\overline{\Theta}}{}^{\hat v}_{\hat u}\}$. Эти системы форм определяют нормальные связности $\overset{\Phi\Psi}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ в расслоении нормалей второго рода, двойственные [4] по отношению к связностям $\overset{\Phi\Psi}{\nabla}{}^{\perp}$ относительно инволютивного преобразования $J:\omega^{\bar{I}}_{\bar{K}} \to \overline{\omega}^{\bar{I}}_{\bar{K}}$ [3].

$$
\begin{gathered}
\overset{00}{\overline{\Theta}}{}^{0}_{v} = \Lambda^{n}_{wv}[\nu^{0}_{q}\nu^{q}_{n}\omega^{w}_{0} + \lambda^{w}_{n}\lambda^{u}_{n}\omega^{n}_{u} + \lambda^{w}_{n}(\mu^{0}_{n} - \lambda^{0}_{u}\lambda^{u}_{n})\omega^{n}_{0} + \omega^{w}_{n} + \nu^{q}_{n}\omega^{w}_{q}],\\
\overset{00}{\overline{\Theta}}{}^{0}_{n} = \omega^{0}_{n} + \lambda^{0}_{u}\omega^{u}_{n} - \nu^{0}_{p}\omega^{p}_{n} + \nu^{p}_{n}[\nu^{0}_{pK}\omega^{K}_{0} + \lambda^{0}_{u}\omega^{u}_{p} - \nu^{0}_{p}(\nu^{0}_{q}\omega^{q}_{0} - \lambda^{0}_{u}\omega^{u}_{0})] +\\
+ \mu^{0}_{n}[\lambda^{u}_{n}\omega^{n}_{u} + (\mu^{0}_{n} - \lambda^{0}_{u}\lambda^{u}_{n})\omega^{n}_{0}],\\
\overset{00}{\overline{\Theta}}{}^{u}_{v} = \Lambda^{uw}_{n}[d\Lambda^{n}_{wv} + (\Lambda^{n}_{wn} - \lambda^{0}_{w})\lambda^{x}_{n}\Lambda^{n}_{xv}\omega^{n}_{0} + \Lambda^{n}_{xv}(\lambda^{0}_{w}\omega^{x}_{0} - \omega^{x}_{w})] +\\
+ \lambda^{x}_{n}\Lambda^{n}_{xv}\omega^{u}_{0} + \delta^{u}_{v}[\lambda^{w}_{n}\omega^{n}_{w} + \nu^{p}_{n}\omega^{n}_{p} + (\mu^{0}_{n} - \lambda^{0}_{w}\lambda^{w}_{n} + \nu^{0}_{p}\nu^{p}_{n})\omega^{n}_{0} + \omega^{n}_{n}],\\
\overset{00}{\overline{\Theta}}{}^{n}_{v} = \Lambda^{n}_{wv}(\lambda^{w}_{n}\omega^{n}_{0} - \omega^{w}_{0}), \qquad (1)\\
\overset{00}{\overline{\Theta}}{}^{v}_{n} = \Lambda^{vw}_{n}[\lambda^{0}_{wK}\omega^{K}_{0} - \lambda^{0}_{w}(\nu^{0}_{p}\omega^{p}_{0} - \lambda^{0}_{u}\omega^{u}_{0}) + \mu^{0}_{n}(\Lambda^{n}_{wn} - \lambda^{0}_{w})\omega^{n}_{0} + \nu^{0}_{p}\omega^{p}_{w}] + \mu^{0}_{n}\omega^{v}_{0},\\
\overset{00}{\overline{\Theta}}{}^{n}_{n} = \omega^{n}_{n} - \omega^{0}_{0} + \nu^{p}_{n}\omega^{n}_{p} + \lambda^{w}_{n}\omega^{n}_{w} - \lambda^{0}_{u}\omega^{u}_{0} + \nu^{0}_{p}\omega^{p}_{0} + (2\mu^{0}_{n} - \lambda^{0}_{u}\lambda^{u}_{n} + \nu^{0}_{p}\nu^{p}_{n})\omega^{n}_{0},\\
\overset{\Phi\Psi}{\overline{\Theta}}{}^{0}_{v} = \overset{00}{\overline{\Theta}}{}^{0}_{v} + \overset{\Phi}{\overline{\Gamma}}{}^{n}_{vu}\,\mu^{0}_{n}[\omega^{u}_{0} + \Lambda^{uw}_{n}(\Lambda^{n}_{wn} - \lambda^{0}_{w})\omega^{n}_{0}], \quad \overset{\Phi\Psi}{\overline{\Theta}}{}^{u}_{v} = \overset{00}{\overline{\Theta}}{}^{u}_{v},\\
\overset{\Phi\Psi}{\overline{\Theta}}{}^{0}_{n} = \overset{00}{\overline{\Theta}}{}^{0}_{n} + \overset{\Psi}{\overline{\Gamma}}{}^{n}_{nq}\,\mu^{0}_{n}[\omega^{q}_{0} + \Lambda^{qp}_{n}(\Lambda^{n}_{p\hat{u}}\omega^{\hat{u}}_{0} + \nu^{0}_{p}\omega^{n}_{0})], \quad \overset{\Phi\Psi}{\overline{\Theta}}{}^{u}_{n} = \overset{00}{\overline{\Theta}}{}^{u}_{n},\\
\overset{\Phi\Psi}{\overline{\Theta}}{}^{n}_{v} = \overset{00}{\overline{\Theta}}{}^{n}_{v} + \overset{\Phi}{\overline{\Gamma}}{}^{n}_{vu}[\omega^{u}_{0} + \Lambda^{uw}_{n}(\Lambda^{n}_{wn} - \lambda^{0}_{w})\omega^{n}_{0}],\\
\overset{\Phi\Psi}{\overline{\Theta}}{}^{n}_{n} = \overset{00}{\overline{\Theta}}{}^{n}_{n} + \overset{\Psi}{\overline{\Gamma}}{}^{n}_{nq}[\omega^{q}_{0} + \Lambda^{qp}_{n}(\Lambda^{n}_{p\hat{u}}\omega^{\hat{u}}_{0} + \nu^{0}_{p}\omega^{n}_{0})],
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\overset{0}{\overline{\Gamma}}{}^{n}_{uv} = \overset{0}{\Gamma}{}^{n}_{uv} = 0, \quad \overset{1}{\overline{\Gamma}}{}^{n}_{uv} = \overline{\Lambda}^{n}_{uv} = -\Lambda^{n}_{uv} = -\overset{1}{\Gamma}{}^{n}_{uv}, \quad \overset{0}{\overline{\Gamma}}{}^{n}_{np} = \overset{0}{\Gamma}{}^{n}_{np} = 0,\\
\overset{1}{\overline{\Gamma}}{}^{n}_{np} = \frac{1}{2}\Lambda^{n}_{qp}\Lambda^{qs}_{n}h_{s} - \frac{1}{2}a_{p} + b^{n}_{pq}\Lambda^{qs}_{n}\nu^{0}_{s}, \overset{2}{\overline{\Gamma}}{}^{n}_{np} = \frac{1}{2}\Lambda^{n}_{qp}\Lambda^{qs}_{n}h_{s} - \frac{1}{2}l_{p} + b^{n}_{pq}\Lambda^{qs}_{n}\nu^{0}_{s},\\
\overset{3}{\overline{\Gamma}}{}^{n}_{np} = \frac{1}{2}\Lambda^{n}_{qp}\Lambda^{qs}_{n}h_{s} - \frac{1}{2}e_{p} + b^{n}_{pq}\Lambda^{qs}_{n}\nu^{0}_{s}, \qquad (2)\\
\overset{4}{\overline{\Gamma}}{}^{n}_{np} = \Lambda^{n}_{qp}\Lambda^{qs}_{n}h_{s} + \Lambda^{n}_{qp}\Lambda^{qs}_{n}\nu^{0}_{s} + \Lambda^{n}_{qp}\nu^{q}_{n},
\end{gathered}
$$

$$h_s = \Lambda^n_{sn} - \Lambda^n_{si}\Lambda^{ij}_n\Lambda^n_{jn} - \Lambda^n_{s\alpha}\Lambda^{\alpha\beta}_n\Lambda^n_{\beta n} + \Lambda^n_{si}\Lambda^{ij}_n\Lambda^n_{j\alpha}\Lambda^{\alpha\beta}_n\Lambda^n_{\beta n} -$$

$$- \Lambda^n_{si}\Lambda^{ij}_n\lambda^0_j - \Lambda^n_{s\alpha}\Lambda^{\alpha\beta}_n\lambda^0_\beta + \Lambda^n_{si}\Lambda^{ij}_n\Lambda^n_{j\alpha}\Lambda^{\alpha\beta}_n\lambda^0_\beta,$$

$$\overset{5}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = -\frac{1}{2(r+2)} b^{tq}_n \Lambda^{sf}_n (\Lambda^n_{sp}\Lambda^n_{fqt} + \Lambda^n_{sq}\Lambda^n_{fpt}) - \Lambda^n_{qp}\nu^q_n + b^n_{pq}\Lambda^{qs}_n\nu^0_s,$$

$$\overset{6}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = -a_p - \Lambda^n_{qp}\nu^q_n + \nu^0_p = -\overset{6}{\Gamma}{}^n_{np},\ \overset{7}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = -l_p - \Lambda^n_{qp}\nu^q_n + \nu^0_p = -\overset{7}{\Gamma}{}^n_{np},$$

$$\overset{8}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = -e_p - \Lambda^n_{qp}\nu^q_n + \nu^0_p = -\overset{8}{\Gamma}{}^n_{np},$$

$$\overset{9}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = C_p - 3B_p - 4\Lambda^n_{qp}\nu^q_n + 2b^n_{pq}\Lambda^{qs}_n\nu^0_s,$$

$$\overset{10}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = C_p - \Lambda^n_{qp}\nu^q_n + \Lambda^n_{pq}\Lambda^{qs}_n\nu^0_s,\ \ \overset{11}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = \overset{11}{\Gamma}{}^n_{np}\ \ (\Lambda^n_{[pq]} = 0).$$

Строение функций, входящих в соотношения (1), (2), показано в работах [1 — 3].

На взаимном с полем симметричного тензора Λ^n_{pq} Λ-подрасслоении в силу $\overline{b}^n_{pq} = -\Lambda^n_{pq}$, $\overline{a}_p = \overline{b}_p = \overline{B}_p = -a_p$ имеем:

$$\overset{1}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = \overset{1}{\Gamma}{}^n_{np} - \overset{6}{\Gamma}{}^n_{np},\ \overset{2}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = \overset{2}{\Gamma}{}^n_{np} - \overset{7}{\Gamma}{}^n_{np},\ \overset{3}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = \overset{3}{\Gamma}{}^n_{np} - \overset{8}{\Gamma}{}^n_{np},$$

$$\overset{4}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = \overset{4}{\Gamma}{}^n_{np},\ \overset{5}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = \overset{6}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = -\overset{6}{\Gamma}{}^n_{np},\ \overset{7}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = -\overset{7}{\Gamma}{}^n_{np},\ \overset{8}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = -\overset{8}{\Gamma}{}^n_{np},$$

$$\overset{9}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = \overset{9}{\Gamma}{}^n_{np} - 6\overset{6}{\Gamma}{}^n_{np},\ \overset{10}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = \overset{10}{\Gamma}{}^n_{np},\ \overset{11}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = \overset{11}{\Gamma}{}^n_{np}.$$

Каждая из систем форм $\{\overset{\Phi\Psi}{\overline{\Theta}}{}^0_{\hat{u}}, \overset{\Phi\Psi}{\overline{\Theta}}{}^{\hat{v}}_{\hat{u}}\}$ удовлетворяет структурным уравнениям Картана — Лаптева:

$$D\overset{\Phi\Psi}{\overline{\Theta}}{}^0_{\hat{u}} = \overset{\Phi\Psi}{\overline{\Theta}}{}^{\hat{w}}_{\hat{u}} \wedge \overset{\Phi\Psi}{\overline{\Theta}}{}^0_{\hat{w}} + \frac{1}{2}\overset{\Phi\Psi}{\overline{R}}{}^0_{\hat{u}PQ}\,\overline{\omega}^P_0 \wedge \overline{\omega}^Q_0,$$

$$D\overset{\Phi\Psi}{\overline{\Theta}}{}^{\hat{v}}_{\hat{u}} = \overset{\Phi\Psi}{\overline{\Theta}}{}^{\hat{w}}_{\hat{u}} \wedge \overset{\Phi\Psi}{\overline{\Theta}}{}^{\hat{v}}_{\hat{w}} + \frac{1}{2}\overset{\Phi\Psi}{\overline{R}}{}^{\hat{v}}_{\hat{u}PQ}\,\overline{\omega}^P_0 \wedge \overline{\omega}^Q_0.$$

Теорема. *На оснащенном в смысле Нордена — Бортолотти* Λ *-подрасслоении в расслоении нормалей 2-го рода индуцируются*

24 нормальные связности $\overset{\Phi\Psi}{\overline{\overline{\nabla}}}{}^{\perp}$*, задаваемые системами слоевых форм* $\{\overset{\Phi\Psi}{\overline{\overline{\Theta}}}{}^{0}_{\hat{u}}, \overset{\Phi\Psi}{\overline{\overline{\Theta}}}{}^{\hat{v}}_{\hat{u}}\}$*, причем связности* $\overset{\Phi 11}{\overline{\overline{\nabla}}}{}^{\perp}$ *определены при* $\Lambda^{n}_{[pq]} = 0$. *Связности* $\overset{\Phi 5}{\overline{\overline{\nabla}}}{}^{\perp}$ *и* $\overset{\Phi 6}{\overline{\overline{\nabla}}}{}^{\perp}$ *будут совпадать в случаях:*

1) голономного Λ-подрасслоения;

2) голономности М-подрасслоения или в случае, когда М-подрасслоение несет двухкомпонентную сопряженную систему (Λ, L)*;*

3) голономности Н-распределения или взаимности Λ-, L-, М-подрасслоений.

Список литературы

1. *Елисеева Н.* А. Нормальные связности, индуцируемые в расслоении нормалей первого рода на Λ-подрасслоении Н(П)-распределения // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2006. №37. С. 44—51.
2. *Елисеева Н. А.* Н(П)-распределения проективного пространства. Калининград, 2002. Деп. в ВИНИТИ РАН, №206-В2002.
3. *Елисеева Н.* А. Двойственный образ Н(П)-распределения проективного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград: Изд-во КГУ, 2002. №33. С. 29—34.
4. *Столяров А. В.* Дифференциальная геометрия полосы // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978. Т. 10. С. 25—54.

N. Eliseeva

NORMAL CONNECTIONS, INDUCED IN A BUNDLE OF NORMALS OF THE 2-ND KIND ON Λ-SUBBUNDLE OF Н(П)-DISTRIBUTION

This article develops some ideas published in one of the previous article of the author [1]. Twenty four normal connections are constructed on equipped in sense of Norden—Bortolotti Λ-subbundle in a bundle of its normals of the 2-nd kind. The coincidence conditions of some connections are indicated.