2. *Кальницкий В.С.* Алгебра обобщенных полей Якоби // Зап. науч. сем. ПОМИ. 1995. Т. 231.

3. *Кальницкий В.С.* Алгебры Якоби плоских многообразий // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2003.

4. *Kalnitsky V.S.* Spray Algebra // Proc. of Inst. Math. NAS Ukraine. 2004 (in print).

Работа поддержана грантом мэрии Санкт-Петербурга и Министерства образования РФ №PD03-1.1-27.

V. Kalnitsky

POLYNOMIAL SYMMETRIES
OF FLAT AND HOMOGENEOUS CONNECTIONS

The classification theorem is formulated for symmetries of homogeneous connections on smooth manifold. The cases admitting realization on manifolds are described.

УДК 514.75

М.В. Кретов
(Калининградский государственный университет)

О ПОДКЛАССАХ КОМПЛЕКСОВ КВАДРИК С ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ В ПОВЕРХНОСТЬ МНОГООБРАЗИЕМ ЦЕНТРОВ

Продолжается изучение комплексов (трехпараметрических семейств) K_{32} центральных квадрик в трехмерном аффинном пространстве [1] путем рассмотрения подклассов многообразий квадрик со специальными свойствами ассоциированных образов. Геометрически охарактеризованы характеристические и фокальные многообразия [2] квадрик, являющихся образующими элементами подклассов комплексов центральных квадрик с вырождающимся в поверхность многообразием центров. Построено безынтегральное представление [3] специального подкласса комплексов K_{32}.

Рассмотрим в трехмерном аффинном пространстве комплекс K_{32}^1 центральных квадрик q, центры которых описывают поверхность Φ, причем аффинная нормаль в каждой точке поверхности Φ сопряжена относительно квадрики q касательной плоскости, а асимптотические касательные пересекают квадрику q в фокальных точках.

Отнесем комплекс K_{32}^1 к реперу $R = \{A, \overline{e_i}\}$, $i, j, k = 1, 2, 3$, где A – центр квадрики q, векторы $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ направлены по асимптотическим линиям к поверхности Φ, а $\overline{e_3}$ – по аффинной нормали и концы A_i векторов $\overline{e_i}$ инцидентны квадрике q. Репер R – канонический. Уравнение квадрики q имеет вид:

$$q \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + 2\lambda x^1 x^2 - 1 = 0. \tag{1}$$

Так как векторы $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ расположены в касательной плоскости, то

$$\omega^3 = 0. \tag{2}$$

Замыкая последнее уравнение и используя лемму Картана, находим:

$$\omega_1^3 = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2, \; \omega_2^3 = \beta\omega^1 + \gamma\omega^2. \tag{3}$$

В силу выбора репера уравнение асимптотических линий поверхности Φ имеет вид:

$$\omega^1\omega^2 = 0. \tag{4}$$

Из уравнений (3) и (4) следуют соотношения

$$\alpha = \gamma = 0, \; \beta \neq 0, \tag{5}$$

значит,

$$\omega_1^3 = \beta\omega^2,\ \omega_2^3 = \beta\omega^1. \qquad (6)$$

Осуществляя частичное замыкание системы (6), получаем

$$d\beta = \beta\omega_2^2 + \beta\omega_1^1 - \beta\omega_3^3. \qquad (7)$$

Так как $\left(A,\overline{e_3}\right)$ – аффинная нормаль, то

$$\left(d\overline{e_1},\overline{e_1},\overline{e_3}\right)_{\omega^1=0} = 0,\ \left(d\overline{e_2},\overline{e_2},\overline{e_3}\right)_{\omega^2=0} = 0,$$

откуда получаем

$$\omega_1^2 = A_1^2\omega^1,\ \omega_2^1 = A_2^1\omega^2. \qquad (8)$$

Принимая формы $\theta^1 = \omega^1$, $\theta^2 = \omega^2$, $\theta^3 = \omega_3^3$ за базис, запишем систему уравнений Пфаффа комплекса K_{32}^1 в виде:

$$\omega^3 = 0,\ \omega_1^2 = A_1^2\theta^1,\ \omega_2^1 = A_2^1\theta^2,\ \omega_1^3 = \beta\theta^2,\ \omega_3^2 = \beta\theta^1,$$
$$\omega_1^1 = A_{1i}^1\theta^i,\ \omega_2^2 = A_{2i}^2\theta^i,\ \omega_3^1 = A_{3i}^1\theta^i,\ \omega_3^2 = A_{3i}^2\theta^i,\ d\lambda = \widetilde{A}_i\theta^i, \qquad (9)$$
$$d\ln\beta = \omega_1^1 + \omega_2^2 - \theta^3.$$

Замыкание уравнения (7) приводит к следующим соотношениям:

$$A_{32}^2 = A_{31}^1,\ A_{33}^2 = 0,\ A_{33}^1 = 0. \qquad (10)$$

Так как асимптотические касательные пересекают квадрику q в фокальных точках, то координаты концов векторов $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ удовлетворяют системе уравнений:

$$q = 0,\ q_1 = 0,\ q_2 = 0,\ q_3 = 0, \qquad (11)$$

где для q_i имеет место:

$$\frac{1}{2}dq = q_i\theta^i. \qquad (12)$$

Из системы уравнений (11) находим соотношения:

$$A_{22}^2 + \lambda A_2^1 + 1 = 0,\ A_{13}^1 = A_{23}^2 = 0,\ A_{12}^1 = A_{21}^2 = -\lambda,\ A_{11}^1 + \lambda A_1^2 + 1 = 0. \qquad (13)$$

Тогда система дифференциальных уравнений комплекса K_{32}^1 принимает вид:

$$\omega^3 = 0,\ \omega_1^2 = A_1^2\theta^1,\ \omega_2^1 = A_2^1\theta^2,\ \omega_1^3 = \beta\theta^2,\ \omega_2^3 = \beta\theta^1,$$
$$\omega_1^1 = -\lambda\omega_1^2 - \theta^1 - \lambda\theta^2,\ \omega_2^2 = -\lambda\omega_2^1 - \lambda\theta^1 - \theta^2,\ \omega_3^1 = a\theta^1 + A_{32}^1\theta^2, \quad (14)$$
$$\omega_3^2 = A_{31}^2\theta^1 + a\theta^2,\ d\ln\beta = \omega_1^1 + \omega_2^2 - \theta^3,\ d\lambda = \tilde{A}_1\theta^1 + \tilde{A}_2\theta^2,$$

где

$$A_{32}^2 = A_{31}^1 = a,$$
$$\tilde{A}_1 = \left(A_1^2A_2^1 - 1\right)^{-1}\Big(\left(A_1^2\right)^2 A_2^1 + A_1^2A_2^1 + 2\lambda^2A_1^2 + \lambda^2 - \lambda - \lambda^2\left(A_1^2\right)^2 A_2^1 -$$
$$- \lambda\beta A_{32}^1A_1^2 - \lambda\beta A_{31}^2 - 2\lambda A_1^2 - \lambda A_1^2A_2^1 - a\beta A_1^2 - a\beta\Big),$$
$$\tilde{A}_2 = \left(A_1^2A_2^1 - 1\right)^{-1}\Big(A_1^2\left(A_2^1\right)^2 + A_1^2A_2^1 + 2\lambda^2A_2^1 + \lambda^2 - \lambda - \lambda^2A_1^2\left(A_2^1\right)^2 -$$
$$- \lambda\beta A_{31}^2A_2^1 - \lambda\beta A_{32}^1 - 2\lambda A_2^1 - \lambda A_1^2A_2^1 - a\beta A_2^1 - a\beta\Big).$$

Находя чистое замыкание системы уравнений (14), убеждаемся в том, что комплекс K_{32}^1 существует и определяется с произволом двух функций двух аргументов.

Характеристическое многообразие квадрики q определяется системой уравнений

$$q_1 = 0,\ q_2 = 0,\ q_3 = 0, \quad (15)$$

записанной для конкретного комплекса.

Для комплексов K_{32}^1 имеет место:

Теорема 1. *Характеристическое многообразие квадрики q содержится в касательной плоскости к поверхности Φ.*

Определение. *Комплекс K_{32}^1 назовем комплексом K_{32}^2, если индикатрисы векторов $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ описывают поверхности с касательными, параллельными координатной плоскости $\left(A, \overline{e_1}, \overline{e_3}\right)$, а индикатриса вектора $\overline{e_2}$ описывает поверхность с касательной, параллельной плоскости $\left(A, \overline{e_2}, \overline{e_3}\right)$.*

Из определения комплекса K_{32}^2 получаем следующие соотношения:

$$A_1^2 = 0,\ A_2^1 = 0,\ A_{31}^2 = 0,\ a = 0. \quad (16)$$

Тогда

$$\omega_1^2 = 0,\ \omega_2^1 = 0,\ \omega_3^2 = 0\ . \qquad (17)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (17), получаем $A_{32}^1 = 0$.

Система дифференциальных уравнений комплекса K_{32}^2 принимает вид:

$$\begin{gathered}\omega^3 = \omega_1^2 = \omega_2^1 = \omega_3^1 = \omega_3^2 = 0,\ \omega_1^3 = \beta\theta^2,\ \omega_2^3 = \beta\theta^1,\ \omega_1^1 = -\theta^1 - \lambda\theta^2, \\ \omega_2^2 = -\lambda\theta^1 - \theta^2,\ d\lambda = \left(\lambda - \lambda^2\right)\left(\theta^1 + \theta^2\right),\ d\ln\beta = \omega_1^1 + \omega_2^2 - \theta^3.\end{gathered} \qquad (18)$$

Замыкание системы (18) удовлетворяется тождественно, значит, комплекс K_{32}^2 существует и определяется вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа.

Обозначим асимптотические линии $\omega^1 = 0,\ \omega^2 = 0$ на поверхности Ф символами l_1 и l_2.

Следующие теоремы дают геометрические свойства комплекса K_{32}^2.

Теорема 2. *Комплекс K_{32}^2 обладает следующими свойствами:*

1) аффинные нормали поверхности (A) параллельны;

2) плоскости $\left(A, \overline{e}_{\hat{i}}, \overline{e}_3\right)$, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k} = 1, 2$, составляют однопараметрические семейства параллельных плоскостей;

3) при движении точки A вдоль асимптотической линии $l_{\hat{i}}$ плоскость $\left(A, \overline{e}_{\hat{j}}, \overline{e}_3\right)$, прямая $\left(A, \overline{e}_{\hat{j}}\right)$ и точка $A_{\hat{j}}\left(\hat{i} \neq \hat{j}\right)$ являются неподвижными;

4) асимптотические линии на поверхности (A) являются прямыми, а поверхность (A) – линейчатой квадрикой $\tilde{Q}$;

5) направление, определяемое аффинной нормалью к поверхности (A), является для образующей квадрики q сопряженным с плоскостью $\left(A, \overline{e}_1, \overline{e}_2\right)$, а направления, определяемые проекциями касательных к линиям $\left(A_{\hat{i}}\right)$ в точке $A_{\hat{i}}$ на плос-

кость $\left(A,\overline{e_1},\overline{e_2}\right)$*, являются сопряженными для квадрики* q *относительно соответствующих диаметральных плоскостей* $\left(A,\overline{e_{\hat{j}}},\overline{e_3}\right)$*;*

6) проекции касательных к линиям $\left(A_{\hat{i}}\right)$ *в точках* $A_{\hat{i}}$ *на плоскости* $x^{\hat{i}}=1$ *совпадают с прямолинейными образующими* $\tilde{Q}$ *в точках* $A_{\hat{i}}$*;*

7) линии $\left(A_{\hat{i}}\right)$ *являются огибающими семейств линий пересечения квадрики* $\tilde{Q}$ *с квадриками* q.

Пусть P_1 – точка пересечения прямых, проходящих через середины отрезков AA_1 и AA_2 и параллельных, соответственно, прямым $\left(A,\overline{e_2}\right)$ и $\left(A,\overline{e_1}\right)$, а P_2 – точка пересечения прямых, проходящих через точки, аффинно-симметричные точкам A_1 и A_2, и параллельных, соответственно, прямым $\left(A,\overline{e_2}\right)$ и $\left(A,\overline{e_1}\right)$.

Теорема 3. *Для того чтобы точки* P_1 *и* P_2 *принадлежали фокальному многообразию квадрики* q*, описывающей комплекс* K_{32}^2*, необходимо и достаточно, чтобы* $\lambda=1$, $\lambda=-\dfrac{1}{2}$*, причем при* $\lambda\notin\left\{-\dfrac{1}{2},1\right\}$ *фокальное многообразие состоит только из двух точек –* A_1 *и* A_2.

Геометрические свойства комплекса K_{32}^2, доказанные в теореме 2, позволяют получить его безынтегральное представление. Построение проводим следующим образом:

1) задаем произвольный гиперболический параболоид $\tilde{Q}$ и выбираем на нем точку A;

2) фиксируем точки A_1 и A_2 на прямолинейных образующих, проходящих через точку A;

3) на аффинной нормали квадрики $\widetilde{Q}$, проходящей через точку A, выбираем точку A_3;

4) с текущей точкой поверхности $\widetilde{Q}$ совмещаем подвижный репер $\widetilde{R} = \{0, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ – такой, что $0 \equiv A$ и $\overline{e_i} = \overline{AA_i}$;

5) для получения образующего элемента комплекса – квадрики q, соответствующей центру A, – зададим с помощью оставшейся одной постоянной некоторое число λ и построим направление $\left(\overline{e_2} - \lambda\overline{e_1}\right)$. Точками A_i, центром A и сопряженными направлениями $\overline{AA_1}$, $\overline{AA_3}$, $\left(\overline{A}, \overline{e_3} - \lambda\overline{e_1}\right)$ однозначно определяется квадрика q. Каждой точке A соответствует одномерное многообразие квадрик q, получающееся изменением полуоси $\overline{AA_3}$. При движении точки A по поверхности $\widetilde{Q}$ получается комплекс K_{32}^2 квадрик q.

Список литературы

1. *Кретов М.В.* Об одном комплексе центральных квадрик с вырождающимся многообразием центров // Седьмая Всесоюз. конф. по совр. пробл. геометрии. Минск, 1979. С. 99.

2. *Малаховский В.С., Махоркин В.В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т. 6. С. 113 – 134.

3. *Фунтикова Т.П.* Безынтегральное представление двух классов вырожденных конгруэнций // Диф. геом. многообр. фигур / Калинингр. ун-т. Калининград, 1976. Вып. 7. С. 130 – 134.

M. Kretov

ABOUT SUBCLASSES OF COMPLEXES OF QUADRICS WITH DEGENERATING IN A SURFACE VARIETY OF THE CENTRES

In work studying of complexes (three-parametrical families) K_{32} of central quadrics in three-dimensional affine space proceeds

by consideration of subclasses of varieties of quadrics with special properties of the associated images. Characteristic and focal varieties of quadrics, being forming elements of subclasses of complexes of central quadrics with variety of the centres degenerating in a surface are vectorially characterized. It is constructed unintegral representation of a special subclass of complexes K_{32}.

УДК 514.76

В.С. Малаховский
(Калининградский государственный университет)

О ГОЛОНОМНОСТИ РАССЛОЕНИЯ РЕПЕРОВ НА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОМ МНОГООБРАЗИИ

На n-мерном дифференцируемом многообразии M_n класса C^∞ исследуется расслоение $H^p(M_n)$ реперов r_x^p порядка p≥2. Установлена голономность расслоений реперов произвольного порядка p, а следовательно, и голономность линейных дифференциальных групп D_n^p (p≥2). Сформулированы принципы корректного применения метода внешних форм и подвижного репера в дифференциальной геометрии и проанализированы принципиальные ошибки некоторых работ, выполненных с нарушением этих принципов.

§1. Голономность линейной дифференциальной группы D_n^2 второго порядка

Рассмотрим n-мерное дифференцируемое многообразие M_n класса C^∞ со структурными базовыми 1-формами ω^i и слоевыми 1-формами θ^α (i, j, k, s=$\overline{1,n}$; $\alpha,\beta,\gamma=\overline{n+1,N}$). Система N пфаффовых форм ω^i, θ^α – линейно независима (см. [2, с. 24]):