Следовательно, A центр луча ℓ.

4/Уравнение торсов прямолинейной конгруэнции (ℓ) имеет вид

$$(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 = 0.$$

Значит они высекают на поверхности (A) сопряженную сеть линий.

Список литературы

1.М а л а х о в с к и й В.С.,Махоркин В.В.Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.- Тр.геометрич.семинара ВИНИТИ,1974, 6,с.113-133.

2.Ф и н и к о в С.П. Метод внешних форм Картана. М.-Л., ГИТТЛ,1948

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

Т.П.Ф у н т и к о в а

ОДНОМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ЭЛЛИПСОВ В ТРЕХМЕРНОМ ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются одномерные многообразия (C) эллипсов с непараллельными плоскостями.Найдены условия,при которых многообразия (C) являются фокальными.Установлен характеристический признак фокальных многообразий (C) ,а также указаны условия,при которых все эллипсы многообразия (C) инцидентны инвариантной квадрике.

§ I. Система дифференциальных уравнений многообразия (C)

Отнесем одномерное многообразие (C) эллипсов к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$,имеющему следующую геометрическую характеристику: вершина A репера помещена в центр эллипса C; вектор $\bar{e}_1$ параллелен характеристике плоскости эллипса C; вектор $\bar{e}_2$ сопряжен по направлению вектору $\bar{e}_1$, причем концы векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ принадлежат эллипсу; вектор $\bar{e}_3$ направлен таким образом,что касательная к индикатрисе вектора $\bar{e}_2$ параллельна плоскости векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_3$.

В построенном репере уравнения эллипса C имеет следующий вид:

$$F \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0, \quad x^3 = 0. \tag{1}$$

$$d\bar{A} = \omega^\alpha \bar{e}_\alpha, \quad d\bar{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta - \tag{2}$$

-деривационные формулы репера R ,причем формы Пфаффа ω^α, ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры аффинного простран-

ства
$$\mathcal{D}\omega^{\alpha}=\omega^{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{\beta}\,,\quad \mathcal{D}\omega^{\beta}_{\alpha}=\omega^{\gamma}_{\alpha}\wedge\omega^{\beta}_{\gamma} \tag{3}$$
и условию эквиаффинности
$$\omega^1_1+\omega^2_2+\omega^3_3=0\,. \tag{4}$$
Система дифференциальных уравнений многообразия (C) записывается следующим образом:
$$\begin{gathered}\omega^1_1=a\theta,\ \ \omega^2_2=0,\ \ \omega^3_2=\theta,\ \ \omega^3=n\theta,\ \ \omega^1=b\theta,\\ \omega^2=\ell\theta,\ \ \omega^3_1=0,\ \ \omega^2_1=p\theta,\ \ \omega^1_2=(1-p)\,\theta,\\ \omega^1_3=m\theta,\ \ \omega^2_3=c\theta,\ \ \theta=\omega^2_1+\omega^1_2\,.\end{gathered} \tag{5}$$
Произвол существования многообразия (C) -семь функций одного аргумента. Характеристика плоскости эллипса C определяется уравнением:
$$x_2=-n\,. \tag{6}$$

Обозначим $M_i\,(i=1,2)$ -точки пересечения характеристики (6) с эллипсом, тогда
$$\overline{M}_i=\overline{A}+(-1)^i\cdot\sqrt{1-n^2}\;\overline{e}_1-n\overline{e}_2\,. \tag{7}$$

Касательная к линии (M_i) в точке M_i определяется следующим вектором:
$$d\overline{M}_i=[b-(-1)^i\frac{n\,dn}{\sqrt{1-n^2}}+(-1)^i\sqrt{1-n^2}\,a-n+np]\overline{e}_1+ +[\ell-dn+(-1)^i p\sqrt{1-n^2}\,\overline{e}_2\,. \tag{8}$$

§ 2. Фокальные многообразия (C)

О п р е д е л е н и е. Многообразие (C), для которого существует огибающая семейства эллипсов, назовем фокальным и точку соприкосновения эллипса и огибающей – фокальной точкой эллипса.

Огибающая многообразия (C) (если она существует) задается уравнениями:
$$F=0\,,\ dF=0\,.$$

Решая эту систему, получаем условие фокальности многообразия (C).

$$a(1-n^2)-n\ell+(-1)^i\,(b-n)\sqrt{1-n^2}=0 \tag{9}$$
и фокальные точки
$$\overline{N}_i=\overline{A}_i+(-1)^i\sqrt{1-n^2}\,\overline{e}_1-n\overline{e}_2 \tag{10}$$
Произвол существования фокальных многообразий (C)-шесть функций одного аргумента. Из формул (7) и (10) следует, что при выполнении условия (8) фокальными точками эллипса являются точки пересечения его с характеристикой (6).

Т е о р е м а I. Многообразие эллипсов (C) является фокальным тогда и только тогда, когда (M_i) и эллипсы имеют общую касательную в точке M_i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Направляющий вектор касательной к эллипсу в точке M_i имеет следующий вид:
$$\overline{E}=(-1)^i\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\overline{e}_1+\frac{1}{n}\overline{e}_2\,. \tag{11}$$
Векторы $\overline{E}$ и $d\overline{M}_i$ коллинеарны тогда и только тогда, когда выполняется условие (9).

§ 3. Многообразие $(C)_Q$

О п р е д е л е н и е. Многообразие эллипсов (C) будем называть многообразием $(C)_Q$, если для него все эллипсы (C) принадлежат инвариантной квадрике Q .

Пусть уравнение квадрики Q имеет следующий вид:
$$(x^1)^2+(x^2)^2+\alpha(x^3)^2+\beta x^1x^2+\gamma x^2x^3+\eta x^3-1=0\,. \tag{12}$$
В силу инвариантности квадрики (12) имеем:
$$\begin{gathered}2(\omega^1_2+\omega^2_1)+\beta\omega^3_2+\gamma\omega^3_1=0\,,\ d\alpha=2\alpha\omega^3_3-\beta\omega^1_3-\gamma\omega^2_3-\alpha\eta\omega^3,\\ \beta\omega^3+\eta\omega^3_1+2\omega^1=0\,,\ d\eta-\eta\omega^3_3-\gamma\omega^2-\beta\omega^1-2\alpha\omega^3-\eta^2\omega^3=0\,,\\ \gamma\omega^3+\eta\omega^3_2+2\omega^2=0\,,d\beta-2\omega^1_3-2\alpha\omega^3_1+\beta\omega^2_2-\gamma\omega^2_1-\beta\eta\omega^3=0\,,\\ 2\omega^1_1+\beta\omega^3_1+\eta\omega^3=0,\\ 2\omega^2_2+\gamma\omega^3_2+\eta\omega^3=0,\\ d\gamma-2\omega^2_3-2\alpha\omega^3_2+\gamma\omega^1_1-\beta\omega^1_2-\gamma\eta\omega^3=0\,.\end{gathered} \tag{13}$$

Учитывая уравнения системы (5) в системе (13), получаем следующие соотношения:

$$\beta=-2,\quad b=n,\quad l=\frac{a(1-n^2)}{n},\quad \eta=-\frac{2a}{n},\quad \gamma=2a,$$

$$da=(2ac-2m-4\alpha a)\theta,\qquad m+ap+2a=0, \qquad (14)$$

$$adn-n\,da+(n^3-4a^2n-\alpha n^3+a^2n^3)\theta=0.$$

Анализируя системы уравнений (5) и (I4), получаем, что произвол существования конгруэнции $(C)_Q$ – две функции одного аргумента.

Список литературы

I. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.- Труды геом.семинара. ВИНИТИ АН СССР, М., 1969, 2, с.I79-206.

2. Ф и н и к о в С.П. Проективно-дифференциальная геометрия. М.-Л., ОНТИ, I937.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.IO 1979

УДК 5I3.73

В.Н. Х у д е н к о

О МНОГООБРАЗИЯХ МНОГОМЕРНЫХ КВАДРИК

В работе [I] введено понятие характеристического многообразия квадрики Q_p ($1\le p\le n-3$), принадлежащей многообразию $(h,h,n)^2_p$). В настоящей работе, являющейся продолжением [I], в проективном пространстве P_n, рассматриваются многообразия $(h,h,n)^2_p$ квадрик Q_p с характеристическими точками. Введено понятие характеристически невырожденного многообразия квадрик Q_p, доказано существование конечного числа характеристически невырожденных многообразий квадрик Q_p с характеристическими точками.

Напомним, что характеристическим многообразиям квадрики $Q_p\in(h,h,n)^2_p$ названо алгебраическое многообразие пространства P_n, определяемое системой уравнений:

$$\Gamma^i_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0,\quad \Gamma^{\hat a i}_{\alpha}x^\alpha=0,\quad \Gamma^i_{\xi}x^\xi+x^i=0,$$

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0,\quad x^a=0;$$

$$(\alpha,\beta=1,2,\dots,p+2;\quad i=1,2,\dots,h;\quad \xi=h+1,\dots,p+2;$$

$$a=p+3,p+4,\dots,n+1;\quad \hat a=p+3,p+4,\dots,n).$$