1) все коники C_1 инцидентны одной плоскости, имеют одну общую точку P^* и центры их находятся на неподвижной прямой (AA_2);
2) фокальными точками коники C_2 являются точки P^*, $\vec{F}_1=\vec{A}-\vec{e}_3$, а также точки пересечения коники C_2 с характеристикой $x^3-\Gamma^2_{12}x^1-1=0$ плоскости $x^2=0$ и прямой

$$(\gamma\Gamma^1_{13}-\gamma_3)x^3-\Gamma^1_{13}x^1=0,\quad x^2=0;$$

3) сдвоенными фокальными точками коники C_3 являются точки A_2, $\vec{F}_2=\vec{A}-\vec{e}_2$, две фокальные точки инцидентны прямой

$$(1-\Gamma^1_{13})x^1+(\alpha\Gamma^1_{13}-\alpha-\alpha_3)x^2=0,\quad x^3=0.$$

Доказательство. 1) Справедливость утверждения следует из того, что в силу уравнений (2) и условия $\theta^1=0$:

$$dx^1=0,\quad d\vec{A}=\theta^2\vec{e}_2,\quad d\vec{e}_2=\theta^3\vec{e}_2;\quad d\vec{P}^*=d(\vec{A}+\vec{e}_3)=0,$$

т.е. плоскость $x^1=0$, прямая (AA_2) и точка P^* неподвижны.
2) Координаты фокальных точек коники C_2 находятся из уравнений (4) и уравнения

$$x^1(x^3-\Gamma^2_{12}x^1-1)(x^3(\gamma\Gamma^1_{13}-\gamma_3)-\Gamma^1_{13}x^1)=0.$$

Решая их, убеждаемся в справедливости данного утверждения.
3) Координаты фокальных точек коники C_3 получаем, решая систему уравнений

$$\begin{cases} x^1(\Gamma^1_{13}(x^1)^2+(x^2)^2-x^1x^2(\alpha-\alpha\Gamma^1_{13}-\alpha_3))=0,\\ (x^1)^2+(x^2)^2-2\alpha x^1x^2-1=0,\quad x^3=0.\end{cases}\tag{6}$$

Если $x^1=0$, то получаем $x^2=\pm1$. Если же $\Gamma^1_{13}(x^1)^2+(x^2)^2+x^1x^2(\alpha_3+\alpha(1-\Gamma^1_{13}))=0$, то вычитая из этого уравнения второе уравнение системы (6), приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} (x^1)^2+(x^2)^2-2\alpha x^1x^2-1=0,\quad x^3=0,\\ ((\Gamma^1_{13}-1)x^1-x^2(\alpha\Gamma^1_{13}-\alpha-\alpha_3))\cdot x^1=0.\end{cases}\tag{7}$$

Решая систему уравнений (7), находим еще четыре фокальные точки коники C_3. Теорема доказана.

Рассмотрим квадрику

$$\Phi=(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-1=0,\tag{8}$$

ассоциированную с образующими элементами комплекса $(QP^*)_{3,1}$. Характеристическое многообразие комплекса квадрик Φ определяется системой уравнений

$$\Gamma^1_{11}(x^1)^2+(\Gamma^1_{21}+\Gamma^2_{11})x^1x^2-x^1x^3+(\Gamma^2_{31}+C)x^2x^3+x^1=0,\tag{9}$$

$$\Gamma^1_{12}(x^1)^2+\Gamma^2_{12}x^1x^2+Cx^1x^3-x^2x^3+x^2=0,\tag{10}$$

$$\Gamma^1_{13}(x^1)^2+(x^2)^2=0.\tag{11}$$

Если $\Gamma^1_{13}>0$, то из уравнения (11) следует $x^1=0$, $x^2=0$, и тогда характеристическое многообразие комплекса квадрик Φ инцидентно прямой (AA_3). Решая систему уравнений (9) - (11) совместно с уравнением (8), получаем две сдвоенные фокальные точки P^*, F_1 квадрики Φ. Если $\Gamma^1_{13}<0$, то характеристическое многообразие комплекса квадрик Φ инцидентно двум плоскостям $x^2=\pm\sqrt{-\Gamma^1_{13}}\,x^1$ и состоит из прямой (AA_3) и двух точек.

Конгруэнция Φ_{P^*} квадрик Φ, соответствующих точке P^*, определяется системой уравнений (2) и условием $\theta^1=0$. Характеристическое многообразие конгруэнции Φ_{P^*} задается системой уравнений (10), (11) и в случае $\Gamma^1_{13}<0$ состоит из трех прямых (AA_3), m, n, где прямые m, n задаются системами уравнений

$$\begin{cases} x^1(\Gamma^1_{12}\pm\Gamma^1_{12}\sqrt{-\Gamma^1_{13}})\mp x^3(\sqrt{-\Gamma^1_{13}}-C)\pm\sqrt{-\Gamma^1_{13}}=0,\\ x^2=\pm\sqrt{-\Gamma^1_{13}}\,x^1.\end{cases}$$

Фокальное многообразие квадрики Φ конгруэнции Φ_{P^*} в этом случае состоит из сдвоенных фокальных точек P^*, F_1 и четырех точек пересечения прямых m, n с квадрикой Φ.

Библиографический список

1. Фунтикова Т.П. Об одном классе вырожденных комплексов, порожденных квадрикой и точкой // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1992. Вып.23. С.105-107.

УДК 514.75

О КОНГРУЭНЦИЯХ ПАР ФИГУР, ПОРОЖДЕННЫХ КОНИКОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ В A_3

Е.А.Щербак

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются кон-

17 Зак. 2036

груэнции пар фигур $F=\{F_1, F_2\}$, где F_1 -центральная коника, а F_2 - плоскость, не параллельная плоскости коники F_1.

Обозначим через C центр коники F_1, через ℓ - линию пересечения плоскости коники F_1 с плоскостью F_2, через L - точку пересечения диаметра коники F_1, сопряженного прямой ℓ относительно F_1, с прямой ℓ.

Определение Конгруэнцией M назовем конгруэнцию пар фигур F, для которой все коники F_1 конгруэнции (F_1) принадлежат квадрике Q, имеющей центр в точке C и являющейся огибающей плоскостей F_2.

Исследования проводятся в каноническом репере $R=\{A, \bar{e}_\alpha\}$ $(\alpha=1,2,3)$, вершина A которого совмещена с центром C коники F_1, вектор $\bar{e}_1$ параллелен ℓ, $\bar{e}_2$ сопряжен $\bar{e}_1$ относительно коники F_1. Концы E_i векторов $\bar{e}_i$ $(i=1,2)$ расположены на конике F_1, а конец E_3 вектора $\bar{e}_3$ - в характеристической точке плоскости F_2. Обозначим $\bar{E}'_\alpha = \bar{A}-\bar{e}_\alpha$.

Уравнения коники F_1, квадрики Q и система уравнений Пфаффа конгруэнции M имеют соответственно вид:

$$(x^1)^2+(x^2)^2-1=0, \qquad x^3=0, \tag{1}$$

$$Q \equiv (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+x^2x^3-1=0, \tag{2}$$

$$\begin{cases} \omega^1=\omega^2=\omega^3=\omega_1^1=0, & 2\omega_2^2=-2\omega_3^3=-\omega_2^3=\Omega^2, \\ \omega_1^2=-2\Omega^1-2\omega_1^3, & 2\omega_2^1=4\Omega^1+3\omega_1^2, \\ \omega_1^3=\Gamma_{11}^3\Omega^1+\Gamma_{12}^3\Omega^2. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь формы $\Omega^i=\omega_3^i$ выбраны за независимые формы конгруэнции M.

Анализируя систему уравнений (3), заключаем, что конгруэнции M существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Доказано, что конгруэнции M обладают следующими геометрическими свойствами :

1) прямолинейная конгруэнция (E_2E_3) и конгруэнция координатных плоскостей $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$ тогда и только тогда односторонне аффинно расслояемы, когда точка E_1 (E'_1) описывает линию;

2) поверхность (L) тогда и только тогда вырождается в линию, когда точка L является сдвоенным фокусом прямой ℓ конгруэнции (ℓ);

3) на квадрике Q касательная вдоль координатной линии $\Omega^1=0$ в точке E_3 параллельна вектору $\overline{E_3L}$, а вдоль $\Omega^2=0$ - вектору $\bar{e}_1$;

4) касательная плоскость поверхности (L) в точке L принадлежит пучку плоскостей, образованному плоскостью коники F_1 и плоскостью F_2;

5) прямая, соединяющая характеристические точки граней $(E_1E_2E_3)$ и $(E'_1E_2E_3)$, параллельна диаметру $E_1E'_1$ коники F_1.

УДК 514.75

НОРМАЛИ ВТОРОГО РОДА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ЦЕНТРОВ МНОГООБРАЗИЯ ГИПЕРКВАДРИК

Е.П.Юрова

(Калининградский государственный университет)

В n-мерном аффинном пространстве A_n рассматривается $(n-1)$-мерное многообразие V_{n-1} центральных невырожденных гиперквадрик Q. В первой дифференциальной окрестности многообразия V_{n-1} для гиперповерхности C центров гиперквадрик этого многообразия построены и геометрически охарактеризованы два поля инвариантных нормалей II рода. Найдена связь между особенностью взаимного расположения этих нормалей и фокальными точками определенного типа на Q.

Данная статья является продолжением работы [1], при этом используются обозначения и результаты последней. Индексы принимают следующие значения: $\alpha, \beta = \overline{1,n}$; $i,j=\overline{1,n-1}$.

Рассмотрим определенную и геометрически охарактеризованную в [1] числовую функцию $A(Q^*)$, где Q^* - гиперквадрика из некоторой области $\mathcal{D} \ni Q$ пространства $R(Q)$ гиперквадрик. В общем случае для многообразия V_{n-1} каждой гиперквадрике соответствует единственный центр. Пусть μ -определенное на гиперповерхности C центров гиперквадрик многообразия V_{n-1} отображение, которое каждой точке $P \in C$ ставит в соответствие