

А. В. Кулешов 

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия

arturkuleshov@yandex.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-8

Симметрии одной задачи гидродинамики со свободной границей

Рассматривается задача о волнах на воде в трехмерном случае без поверхностного натяжения, относящаяся к классу задач со свободной границей. Как показали Т. Брук Бенджамин и П. Олвер, на задачи такого типа можно распространить методы группового анализа дифференциальных уравнений. Основу группового анализа составляет техника вычисления алгебры Ли инфинитезимальных симметрий заданной системы дифференциальных уравнений. Цель настоящей работы — продемонстрировать применение этих методов на примере вышеуказанной задачи. Произведен подробный вывод базисных инфинитезимальных симметрий, указан их физический смысл, вычислены их попарные коммутаторы и найдены члены производного ряда для алгебры Ли, являющейся линейной оболочкой данных инфинитезимальных симметрий. Показано, что все инфинитезимальные симметрии вышеуказанной задачи образуют 13-мерную неразрешимую алгебру Ли, что согласуется с результатом, приведенным без доказательства в работе вышеуказанных авторов.

Ключевые слова: задача со свободной границей, групповой анализ, инфинитезимальная симметрия, алгебра Ли

Поступила в редакцию 10.05.2025 г.

© Кулешов А. В., 2025

1. Введение. Постановка задачи

Нахождение групп симметрий тех или иных дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных, составляет основу группового анализа дифференциальных уравнений, восходящего к работам Софуса Ли и имеющего многочисленные приложения. Например, с помощью этого метода строят новые решения по уже известным, находят точные решения, имеющие физический смысл, а также получают законы сохранения согласно теореме Нётер (см., напр., монографии [1—4]). В работе [7] показано, каким образом групповой анализ можно распространить на случай задач гидродинамики со свободной границей. Свой подход авторы указанной работы проиллюстрировали на примере нахождения алгебры Ли инфинитезимальных симметрий для двумерной задачи при отсутствии поверхностного натяжения ($\sigma = 0$), ограничившись лишь указанием конечного результата для аналогичной трехмерной задачи. В настоящей статье мы выполняем указанный пробел, производя подробный вывод алгебры Ли инфинитезимальных симметрий для трехмерного случая.

Пусть (x, y, z) — прямоугольная декартова система координат, причем ось y направлена вверх, и пусть несжимаемая невязкая жидкость единичной плотности заполняет область D_η , ограниченную сверху подвижной (свободной) поверхностью S , описываемой уравнением

$$y = \eta(x, z, t), \quad (1.1)$$

где t — время, η — некоторая гладкая функция переменных x, z, t . Горизонтальная проекция S_0 поверхности S представляет собой всю плоскость xz . Область D_η может как простирается на бесконечную глубину для всех $(x, z) \in S_0$, так и быть ограниченной снизу фиксированной горизонтальной плоско-

стью $y = -h$. Для всякой функции $f(x, y, z, t)$ обозначим через f_S ее ограничение на поверхность S , то есть результат подстановки уравнения (1.1) в данную функцию.

Следуя [7], будем считать, что поток жидкости порожден консервативными, а значит, безвихревыми силами. В таком случае векторное поле скоростей $\vec{u}: D_\eta \rightarrow \mathbb{R}^3$ является потенциальным, то есть представляется в виде $\vec{u} = \nabla\varphi$, где $\varphi: D_\eta \rightarrow \mathbb{R}$ — потенциал. В силу того что несжимаемость жидкости приводит к условию $\operatorname{div} \vec{u} = 0$, потенциал φ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0. \quad (1.2)$$

Наряду с ним рассматриваются нелинейные граничные условия: кинематическое условие (kinematic condition)

$$\Gamma_1 \equiv \eta_t - \Phi_{(y)} + \Phi_{(x)}\eta_x + \Phi_{(z)}\eta_z = 0 \quad (1.3)$$

и динамическое условие (dynamic condition) для случая отсутствия поверхностного натяжения ($\sigma = 0$)

$$\Gamma_2 \equiv \Phi_{(t)} + \frac{1}{2}(\Phi_{(x)}^2 + \Phi_{(y)}^2 + \Phi_{(z)}^2) + g\eta = 0, \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{(x)} &= (\varphi_x)_S, \quad \Phi_{(y)} = (\varphi_y)_S, \\ \Phi_{(z)} &= (\varphi_z)_S, \quad \Phi_{(t)} = (\varphi_t)_S. \end{aligned}$$

Уравнения (1.2—1.4) вместе образуют *трехмерную задачу со свободной границей*. Требуется найти алгебру Ли инфинитезимальных симметрий задачи (1.2—1.4).

Замечание 1. В число кинематических условий также включают (см., напр., [7]) требование $|\nabla\varphi| \rightarrow 0$ при

$$(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow \infty,$$

а также условие $\varphi_y = 0$ при $y = -h$ (в случае конечной глубины). Кроме того, требуют, чтобы $\eta \rightarrow 0$ при $(x^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow \infty$. Однако данные требования в наших последующих рассмотрениях учитываться не будут.

Замечание 2. Нахождение алгебры Ли инфинитезимальных симметрий для двумерной задачи при наличии поверхностного натяжения ($\sigma \neq 0$) приведено в статье [6].

Замечание 3. К аналогичным задачам несколько более общего вида приводит модель трехмерной жидкости под тонким слоем льда [8; 10], а также модель пульсирующего (pulsatile) потока в трубках с вязкоупругими (viscoelastic) стенками [9]. Задачам со свободной границей посвящена монография [5].

2. Описание метода

Материал данного пункта основан на приложении 2 статьи [7]. Рассмотрим задачу со свободной границей в более общей постановке. Обозначим набор независимых переменных через $(\vec{x}, y) = (x^1, \dots, x^p, y) \in \mathbb{R}^{p+1}$, причем время t содержится среди них в качестве одной из переменных x^i ($i = \overline{1, p}$), а координата $y \equiv x^{p+1}$ выделена, поскольку в рассматриваемой задаче она играет роль вертикального направления. Набор зависимых переменных обозначим через

$$\vec{\phi} = (\phi^1, \dots, \phi^q) \in \mathbb{R}^q,$$

а через $\partial \vec{\phi}$ обозначим набор из всевозможных частных производных ϕ_I^j функций ϕ^j ($j = \overline{1, q}$) по переменным $(\vec{x}, y)$ до заданного порядка v_1 включительно:

$$\phi_I^j := \frac{\partial^{|I|} \phi^j}{\partial x^I} = \frac{\partial^{|I|} \phi^j}{\partial (x^1)^{\lambda_1} \dots \partial (x^{p+1})^{\lambda_{p+1}}}, \quad 1 \leq |I| \leq v_1,$$

где $I = (\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1})$, $|I| = \lambda_1 + \dots + \lambda_{p+1}$. Сама задача со свободной границей представляется в виде системы дифференциальных уравнений с частными производными

$$\vec{L}(\vec{x}, y, \vec{\phi}, \partial \vec{\phi}) = 0, \quad (2.1)$$

рассматриваемой на области

$$D_\eta = \{(\vec{x}, y): y \leq \eta = h(\vec{x})\} \subset \mathbb{R}^{p+1},$$

вместе с граничными условиями

$$\vec{\Gamma}(\vec{x}, \eta, \eta_J, \vec{\phi}_S, \partial \vec{\phi}_S) = 0, \quad (2.2)$$

справедливыми на верхней границе данной области, называемой *свободной поверхностью*

$$S = \{(\vec{x}, y): y = \eta = h(\vec{x})\},$$

где

$$\eta_J := \frac{\partial^{|J|} \eta}{\partial x^J} = \frac{\partial^{|J|} \phi^J}{\partial (x^1)^{\lambda_1} \dots \partial (x^p)^{\lambda_p}},$$

$$J = (\lambda_1, \dots, \lambda_p), \quad 1 \leq |J| \leq \nu_2,$$

$$\vec{\phi}_S := \vec{\phi}(\vec{x}, \eta(\vec{x})).$$

Через $\partial \vec{\phi}_S$ обозначен набор из всевозможных частных производных функций $\vec{\phi}$ по переменным $(\vec{x}, y)$ до заданного порядка ν_2 включительно, ограниченных на поверхность S :

$$(\phi_I^J)_S := \phi_I^J(\vec{x}, \eta(\vec{x})), \quad 1 \leq |I| \leq \nu_2.$$

Решение задачи (2.1, 2.2) — это пара функций $h: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ и $\vec{f}: D_\eta \rightarrow \mathbb{R}^q$ таких, что $\eta = h(\vec{x})$ и $\vec{\phi} = \vec{f}(\vec{x}, y)$ удовлетворяют системе (2.1, 2.2) тождественно.

Рассмотрим диффеоморфизм пространства $\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^q$ на себя, заданный уравнениями

$$\tilde{\vec{x}} = \vec{X}(\vec{x}, y, \vec{\phi}), \quad \tilde{y} = \vec{Y}(\vec{x}, y, \vec{\phi}), \quad \tilde{\vec{\phi}} = \vec{P}(\vec{x}, y, \vec{\phi}).$$

Если он достаточно близок к тождественному отображению, то область D_η взаимно-однозначно отображится в новую область $D_{\tilde{\eta}}$ со свободной границей $\tilde{\eta} = \tilde{h}(\tilde{\vec{x}})$, а функция $\vec{f}: D_\eta \rightarrow \mathbb{R}^q$ преобразуется в новую функцию $\tilde{\vec{f}}: D_{\tilde{\eta}} \rightarrow \mathbb{R}^q$. Такой диффеоморфизм называется *симметрией задачи* (2.1, 2.2), если пара $\tilde{h}, \tilde{\vec{f}}$ является ее решением всякий раз, когда $\tilde{h}, \tilde{\vec{f}}$ — решение.

Пусть $i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}$, причем по повторяющемуся индексу предполагается суммирование согласно правилу Эйнштейна. Векторное поле X на $\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^q$ рассматривается как дифференциальный оператор первого порядка, действующий на $C^\infty(\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^q)$:

$$X = \alpha^i(\vec{x}, y, \vec{\phi}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \beta(\vec{x}, y, \vec{\phi}) \frac{\partial}{\partial y} + \psi^j(\vec{x}, y, \vec{\phi}) \frac{\partial}{\partial \phi^j}. \quad (2.3)$$

Векторное поле такого вида является генератором некоторой локальной однопараметрической группы диффеоморфизмов $\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^q$ на себя. Если все они являются симметриями задачи (2.1, 2.2), то векторное поле X называется *инфинитезимальной симметрией* данной задачи. Множество всех инфинитезимальных симметрий задачи (2.1, 2.2) образует алгебру Ли относительно обычного коммутатора векторных полей. Последняя является алгеброй Ли группы Ли симметрий задачи (2.1, 2.2) и играет важную роль в исследовании данной задачи.

Для векторного поля вида (2.3) рассматриваются его продолжения в пространства струй высших порядков над $\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^q$. Формула для ν -го продолжения векторного поля X имеет вид

$$\text{pr}_\nu X = X + \delta \phi_I^j \frac{\partial}{\partial \phi_I^j}, \quad 1 \leq |I| \leq \nu, \quad (2.4)$$

где

$$\delta \phi_I^j = \partial_I (\psi^j - X_1(\phi^j)) + X_1(\phi_I^j), \quad (2.5)$$

$$X_1 = \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \beta \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.6)$$

Здесь и далее мы опускаем аргументы y функций α^i, β, ψ^j .

В рамках задачи со свободной границей также определяется граничное продолжение (boundary prolongation), формула для которого имеет вид

$$\text{pr}_\nu X_S = X_S + (\delta \phi_I^j)_S \frac{\partial}{\partial \phi_{(I)}^j} + \delta \eta_J \frac{\partial}{\partial \eta_J}, \quad (2.7)$$

где

$$X_S = \alpha_S^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \beta_S \frac{\partial}{\partial \eta} + \psi_S^j \frac{\partial}{\partial \Phi^j},$$

$$\delta \eta_J = \partial_J (\beta_S - X_0(\eta)) + X_0(\eta_J), \quad (2.8)$$

$$X_0 = \alpha_S^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \Phi_{(I)}^j = (\phi_I^j)_{S'}, \quad \Phi^j = (\phi^j)_S. \quad (2.9)$$

$$1 \leq |I| \leq \nu, \quad 1 \leq |J| \leq \nu.$$

Для величин $\delta \phi_I^j$, $\delta \eta_J$ справедливы рекуррентные формулы (см.: [3]):

$$\delta \phi_{Iu}^j = D_u (\delta \phi_I^j) - \phi_{Iv}^j D_u \alpha^v, \quad u, v = \overline{1, p+1}, \quad (2.10)$$

$$\delta \eta_{Ji} = D_i (\delta \eta_J) - \eta_{Jk} D_i (\alpha_S^k), \quad (2.11)$$

где D_u — операторы полных производных:

$$D_u = \frac{\partial}{\partial x^u} + \varphi_u \frac{\partial}{\partial \varphi} + \varphi_{uv} \frac{\partial}{\partial \varphi_v}, \quad u = \overline{1, p+1};$$

$$\phi_{Iu}^j = \frac{\partial}{\partial x^u} \frac{\partial^{|I|} \phi^j}{\partial x^I}, \quad \eta_{Ji} = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial^{|J|} \eta}{\partial x^J}.$$

Имеет место

Теорема [7, с. 183]. *Векторное поле X является инфинитезимальной симметрией задачи (2.1, 2.2) тогда и только тогда, когда имеют место равенства*

$$\text{pr}_{v_1} X (\vec{\Lambda}) = 0 \quad \text{при} \quad \vec{\Lambda} = 0, \quad (2.12)$$

$$\text{pr}_{v_2} X_S (\vec{\Gamma}) = 0 \quad \text{при} \quad \vec{\Gamma} = 0, \quad (2.13)$$

где $\text{pr}_{v_1} X$ и $\text{pr}_{v_2} X_S$ определяются по формулам (2.4—2.9).

Уравнения (2.12) и (2.13) называются *определяющими уравнениями* для нахождения инфинитезимальных симметрий задачи (2.1, 2.2).

Замечание 4. В формулах продолжения, а также в определяющих уравнениях символы ϕ_I^j , Φ^j , $\Phi_{(I)}^j$, η , η_J рассматриваются как независимые переменные.

3. Составление определяющих уравнений

В соответствии с п. 2 всякая инфинитезимальная симметрия задачи (1.2—1.4) должна иметь вид

$$X = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \psi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (3.1)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \tau, \psi$ — функции переменных x, y, z, t, φ . На протяжении всего дальнейшего изложения индексы будут пробегать следующие значения (если не оговорено иное):

$$u, v, w = \overline{1, 4}; \quad i, j, k = \overline{1, 3}; \quad r, s = \overline{2, 4}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} t &= x^1, \quad x = x^2, \quad z = x^3, \quad y = x^4, \\ \tau &= \alpha^1, \quad \alpha = \alpha^2, \quad \gamma = \alpha^3, \quad \beta = \alpha^4, \\ \frac{\partial}{\partial x^u} &= \partial_{x^u} = \partial_u, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = \partial_\varphi, \quad \varphi_{x^u} = \varphi_u, \quad \varphi_{x^u x^v} = \varphi_{uv}, \\ \delta \varphi_{x^u} &= \delta \varphi_u, \quad \delta \varphi_{x^u x^v} = \delta \varphi_{uv}, \quad \Phi_{(x^u)} = \Phi_{(u)}, \\ \eta_{x^i} &= \eta_i, \quad \delta \eta_{x^i} = \delta \eta_i, \end{aligned}$$

тогда с учетом правила Эйнштейна суммирования по повторяющемуся индексу векторное поле X примет вид

$$X = \alpha^u \frac{\partial}{\partial x^u} + \psi \frac{\partial}{\partial \varphi} = \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \psi \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (3.2)$$

Поскольку порядок уравнения (1.2) равен двум, то нам потребуется второе продолжение векторного поля X , которое вследствие формул (2.4—2.6) имеет вид

$$\text{pr}_2 X = X + \delta \varphi_u \frac{\partial}{\partial \varphi_u} + \sum_{u \leq v} \delta \varphi_{uv} \frac{\partial}{\partial \varphi_{uv}}, \quad (3.3)$$

где в силу (2.10)

$$\delta \varphi_u = D_u \psi - \varphi_v D_u \alpha^v, \quad (3.4)$$

$$\delta \varphi_{uv} = D_u \delta \varphi_v - \varphi_{vw} D_u \alpha^w. \quad (3.5)$$

Порядок уравнений (1.3) и (1.4) равен единице, а потому достаточно ограничиться первым граничным продолжением этого векторного поля

$$\operatorname{pr}_1 X_S = X_S + (\delta\varphi_u)_S \frac{\partial}{\partial\Phi(u)} + \delta\eta_i \frac{\partial}{\partial\eta_i}, \quad (3.6)$$

где в силу (2.11)

$$\delta\eta_i = D_i(\beta_S) - \eta_j D_i(\alpha_S^j), \quad (3.7)$$

$$D_i(\alpha_S^j) = D_i(\alpha^j)_S + (\alpha_y^j)_S \eta_i. \quad (3.8)$$

Итак, определяющие уравнения (2.12, 2.13) для задачи (1.2—1.4) имеют вид

$$\operatorname{pr}_2 X(\Delta\varphi) = 0 \quad \text{при} \quad \Delta\varphi = 0, \quad (3.9)$$

$$\operatorname{pr}_1 X_S(\Gamma_1) = 0 \quad \text{при} \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 = 0, \quad (3.10)$$

$$\operatorname{pr}_1 X_S(\Gamma_2) = 0 \quad \text{при} \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 = 0, \quad (3.11)$$

где $\operatorname{pr}_2 X$ и $\operatorname{pr}_1 X_S$ выражаются по формулам (3.3) и (3.6) соответственно.

4. Анализ уравнения (3.9)

Лемма 1. *Уравнение (3.9) равносильно системе*

$$\alpha_x = \beta_y = \gamma_z, \quad \alpha_y = -\beta_x, \quad \alpha_z = -\gamma_x, \quad \beta_z = -\gamma_y, \quad (4.1)$$

$$\alpha_\varphi = \beta_\varphi = \gamma_\varphi = 0, \quad (4.2)$$

$$\tau_x = \tau_y = \tau_z = \tau_\varphi = 0, \quad (4.3)$$

$$\Delta\psi = 0, \quad \Delta\alpha = 2\psi_{x\varphi}, \quad \Delta\beta = 2\psi_{y\varphi}, \quad (4.4)$$

$$\Delta\gamma = 2\psi_{z\varphi}, \quad \psi_{\varphi\varphi} = 0. \quad (4.5)$$

Доказательство. С учетом (3.2, 3.3) уравнение (3.9) принимает вид

$$\sum_r \delta\varphi_{rr} = 0 \quad \text{при} \quad \Delta\varphi = 0. \quad (4.6)$$

Формулы (3.5) распишем подробнее применительно к $\delta\varphi_{rr}$:

$$\delta\varphi_{rr} = (\Delta_r\psi + \psi_\varphi\varphi_{rr}) - \varphi_s(\Delta_r\alpha^s + \alpha_\varphi^s\varphi_{rr}) - 2\varphi_{rs}D_r\alpha^s,$$

где

$$\Delta_r\alpha^s = \alpha_{rr}^s + 2\alpha_{r\varphi}^s\varphi_r + \alpha_{\varphi\varphi}^s\varphi_r^2,$$

$$\Delta_r\psi = \psi_{rr} + 2\psi_{r\varphi}\varphi_r + \psi_{\varphi\varphi}\varphi_r^2.$$

Тогда левая часть (4.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_r \delta\varphi_{rr} &= \sum_r \Delta_r\psi + \psi_\varphi\Delta\varphi - \sum_r \varphi_u\Delta_r\alpha^u - \\ &\quad - \varphi_u\alpha_\varphi^u\Delta\varphi - 2\sum_r \varphi_{ru}D_r\alpha^u. \end{aligned}$$

Все величины φ_{ru} фигурируют здесь в явной форме. С учетом уравнения $\Delta\varphi = 0$ имеем $\varphi_{zz} = -\varphi_{xx} - \varphi_{yy}$, поэтому (4.6) принимает вид

$$\begin{aligned} &\sum_r \Delta_r\psi - \sum_r \varphi_u\Delta_r\alpha^u - \\ &\quad - 2\varphi_{xu}D_x\alpha^u - 2\varphi_{yu}D_y\alpha^u - 2\varphi_{xz}D_z\alpha - 2\varphi_{yz}D_z\beta + \\ &\quad + 2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy})D_z\gamma - 2\varphi_{zt}D_z\tau = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Рассматривая левую часть (4.7) как полином от переменных

$$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \varphi_{xx}, \varphi_{xy}, \varphi_{yy}, \varphi_{xz}, \varphi_{yz}, \varphi_{xt}, \varphi_{yt}, \varphi_{zt}$$

с коэффициентами, зависящими лишь от x, y, z, t, φ , мы приравняем каждый из коэффициентов к нулю, в результате чего получаем систему (4.1—4.5). Лемма доказана.

Следствие 1. Коэффициенты α, β, γ зависят лишь от переменных x, y, z, t , в то время как τ зависит лишь от t .

Следствие 2. Имеют место равенства

$$\alpha_{rr}^r = -\alpha_{ss}^r, \quad r \neq s, \quad (4.8)$$

$$D_u\alpha^r = \alpha_u^r, \quad D_r\tau = 0, \quad D_t\tau = \tau_t. \quad (4.9)$$

5. Анализ уравнения (3.10)

Лемма 2. Пусть имеют место равенства (4.1—4.5), тогда уравнение (3.10) равносильно системе уравнений

$$\tau_t + \psi_\varphi = 2\alpha_x, \quad (5.1)$$

$$\psi_x = \alpha_t, \quad \psi_z = \gamma_t, \quad \psi_y = \beta_t \quad (5.2)$$

на поверхности S .

Доказательство. С учетом (3.2, 3.6) уравнение (3.10) принимает вид

$$\begin{aligned} & \delta\eta_t - (\delta\varphi_y)_S + (\delta\varphi_x)_S\eta_x + \varphi_x\delta\eta_x + \\ & + (\delta\varphi_z)_S\eta_z + \varphi_z\delta\eta_z = 0 \quad \text{при} \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Распишем подробно $\delta\eta_x$, $\delta\eta_z$ и $\delta\eta_t$, используя формулы (3.7, 3.8), которые упрощаются благодаря равенствам (4.9):

$$\begin{aligned} \delta\eta_t = & (\beta_t)_S + (\beta_y)_S\eta_t - \eta_x(\alpha_t)_S - \eta_x(\alpha_y)_S\eta_t - \\ & - \eta_z(\gamma_t)_S - \eta_z\eta_t(\gamma_y)_S - \eta_t(\tau_t)_S, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \delta\eta_i = & (\beta_i)_S + (\beta_y)_S\eta_i - \eta_j(\alpha_i^j)_S - \\ & - \eta_x\eta_i(\alpha_y)_S - \eta_z\eta_i(\gamma_y)_S, \quad i = 2, 3. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Подставляя формулы (3.4), (5.4) и (5.5) в равенство (5.3), получим:

$$\begin{aligned} & \beta_t + \beta_y\eta_t - \eta_x\alpha_t - \eta_x\alpha_y\eta_t - \eta_z\gamma_t - \eta_z\eta_t\gamma_y - \eta_t\tau_t - \\ & - (D_y\psi - \varphi_x\alpha_y - \varphi_y\beta_y - \varphi_z\gamma_y) + \\ & + (D_x\psi - \varphi_x\alpha_x - \varphi_y\beta_x - \varphi_z\gamma_x)\eta_x + \\ & + \varphi_x(\beta_x + \beta_y\eta_x - \eta_x\alpha_x - \eta_x^2\alpha_y - \eta_z\gamma_x - \eta_z\eta_x\gamma_y) + \\ & + \varphi_z(\beta_z + \beta_y\eta_z - \eta_x\alpha_z - \eta_x\eta_z\alpha_y - \eta_z\gamma_z - \eta_z^2\gamma_y) + \\ & + (D_z\psi - \varphi_x\alpha_z - \varphi_y\beta_z - \varphi_z\gamma_z)\eta_z = 0 \quad \text{при} \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 = 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где S мы для краткости опустили (так будем делать и далее).

Учитывая систему (3.10, 3.11), сделаем подстановку:

$$\eta_t = \varphi_y - \varphi_x \eta_x - \varphi_z \eta_z,$$

тогда (5.6) примет вид

$$\begin{aligned} & \beta_t + \beta_y(\varphi_y - \varphi_x \eta_x - \varphi_z \eta_z) - \\ & - \eta_x \alpha_t - \eta_x \alpha_y(\varphi_y - \varphi_x \eta_x - \varphi_z \eta_z) - \\ & - \eta_z \gamma_t - \eta_z \gamma_y(\varphi_y - \varphi_x \eta_x - \varphi_z \eta_z) - \tau_t(\varphi_y - \varphi_x \eta_x - \varphi_z \eta_z) - \\ & - (D_y \psi - \varphi_x \alpha_y - \varphi_y \beta_y - \varphi_z \gamma_y) + \\ & + (D_x \psi - \varphi_x \alpha_x - \varphi_y \beta_x - \varphi_z \gamma_x) \eta_x + \\ & + \varphi_x(\beta_x + \beta_y \eta_x - \eta_x \alpha_x - \eta_x^2 \alpha_y - \eta_z \gamma_x - \eta_z \eta_x \gamma_y) + \\ & + (D_z \psi - \varphi_x \alpha_z - \varphi_y \beta_z - \varphi_z \gamma_z) \eta_z + \\ & + \varphi_z(\beta_z + \beta_y \eta_z - \eta_x \alpha_z - \eta_x \eta_z \alpha_y - \eta_z \gamma_z - \eta_z^2 \gamma_y) = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Рассматривая левую часть (5.7) как полином от переменных η_x, η_z с коэффициентами, зависящими лишь от

$$x, y, z, t, \varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z,$$

мы сводим (5.7) к системе:

$$\eta_x^2: \quad \alpha_y \varphi_x - \varphi_x \alpha_y = 0, \quad (5.8)$$

$$\eta_z^2: \quad \gamma_y \varphi_z - \varphi_z \gamma_y = 0, \quad (5.9)$$

$$\eta_x \eta_z: \quad \alpha_y \varphi_z + \gamma_y \varphi_x - \varphi_x \gamma_y - \varphi_z \alpha_y = 0, \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \eta_x: \quad & -\beta_y \varphi_x - \alpha_t - \alpha_y \varphi_y + \tau_t \varphi_x + \\ & + (D_x \psi - \varphi_x \alpha_x - \varphi_y \beta_x - \varphi_z \gamma_x) + \\ & + \varphi_x \beta_y - \varphi_x \alpha_x - \varphi_z \alpha_z = 0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \eta_z: \quad & -\beta_y \varphi_z - \gamma_t - \gamma_y \varphi_y + \tau_t \varphi_z - \varphi_x \gamma_x + \\ & + (D_z \psi - \varphi_x \alpha_z - \varphi_y \beta_z - \varphi_z \gamma_z) + \varphi_z \beta_y - \varphi_z \gamma_z = 0, \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} 1: \quad & \beta_t + \beta_y \varphi_y - \tau_t \varphi_y - (D_y \psi - \varphi_x \alpha_y - \varphi_y \beta_y - \varphi_z \gamma_y) + \\ & + \varphi_x \beta_x + \varphi_z \beta_z = 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Равенства (5.8—5.10) тождественно выполняются и, таким образом, не влекут никаких ограничений на симметрию X . Рассматривая левые части равенств (5.11—5.13) как полиномы от переменных $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$, мы приравняем каждый из их коэффициентов к нулю, в результате чего получаем систему уравнений, часть из которых являются следствиями системы (4.1—4.5), а оставшиеся имеют вид (5.1, 5.2). Лемма доказана.

6. Анализ уравнения (3.11)

Лемма 3. Уравнение (3.11) с условиями (4.1—4.5, 5.1—5.2) приводится к виду

$$\psi_t + g\{(\tau_t - \psi_\varphi)\eta + \beta\} = 0 \quad \text{на } S. \quad (6.1)$$

Доказательство. Распишем подробнее уравнение (3.11), используя (1.3, 3.2, 3.6):

$$\delta\varphi_t + \sum_r \varphi_r \delta\varphi_r + g\beta = 0 \quad \text{при } \Gamma_1 = \Gamma_2 = 0, \quad (6.2)$$

где S мы для краткости снова опустили. Подставляя выражения (3.4) для $\delta\varphi_u$ в (6.2), получим:

$$D_t\psi - \varphi_u D_t\alpha^u + \sum_r \varphi_r (D_r\psi - \varphi_u D_r\alpha^u) + g\beta = 0$$

при $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$, что с учетом (4.9) приводится к виду

$$\psi_t + \psi_\varphi\varphi_t - \varphi_u\alpha_t^u + \sum_r \varphi_r (\psi_r + \psi_\varphi\varphi_r - \varphi_s\alpha_r^s) + g\beta = 0 \quad (6.3)$$

при $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$.

Учитывая систему (3.10, 3.11), сделаем подстановку:

$$\varphi_t = -\frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) - g\eta,$$

тогда (6.3) примет вид

$$\begin{aligned} \psi_t - (\psi_\varphi - \tau_t) \left(\frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) + g\eta \right) - \varphi_x\alpha_t - \varphi_y\beta_t - \\ - \varphi_z\gamma_t + \varphi_x(\psi_x + \psi_\varphi\varphi_x - \varphi_x\alpha_x - \varphi_y\beta_x - \varphi_z\gamma_x) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \varphi_y(\psi_y + \psi_\varphi \varphi_y - \varphi_x \alpha_y - \varphi_y \beta_y - \varphi_z \gamma_y) + \\
 & + \varphi_z(\psi_z + \psi_\varphi \varphi_z - \varphi_x \alpha_z - \varphi_y \beta_z - \varphi_z \gamma_z) + g\beta = 0. \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

Рассматривая левую часть (6.4) как полином от переменных $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ с коэффициентами, зависящими лишь от x, y, z, t, φ , мы сводим (6.4) к системе:

$$\varphi_r^2: -\frac{1}{2}(\psi_\varphi - \tau_t) + \psi_\varphi = \alpha_r^r \quad (\text{по } r \text{ не суммируем}), \quad (6.5)$$

$$\varphi_r \varphi_s: -\alpha_r^s - \alpha_s^r = 0 \quad (r \neq s), \quad (6.6)$$

$$\varphi_r: -\alpha_t^r + \psi_r = 0, \quad (6.7)$$

$$1: \psi_t + g\eta(\tau_t - \psi_\varphi) + g\beta = 0. \quad (6.8)$$

Уравнения (6.5—6.7) являются следствиями ранее полученных уравнений (4.1—4.5, 5.1, 5.2), а (6.8) приводится к виду (6.1). Лемма доказана.

Замечание 5. Независимую переменную η , фигурирующую явно либо неявно в уравнениях (5.1, 5.2, 6.1), далее будем везде заменять на y .

7. В силу (4.5) ψ_φ не зависит от φ , а значит, ψ можно представить в виде линейной функции по данной переменной:

$$\psi = c_0(x, y, z, t)\varphi + \chi(x, y, z, t). \quad (7.1)$$

Покажем, что c_0 — константа. В самом деле, в силу следствия 1 коэффициенты α, β, γ зависят лишь от переменных x, y, z, t , в то время как τ зависит лишь от t . Поэтому, дифференцируя (7.1) по x, y, z и t , с учетом равенств (5.2, 6.1) получим

$$(c_0)_r \varphi + \chi_r = \psi_r = \alpha_t,$$

$$(c_0)_t \varphi + \chi_t = \psi_t = -gy(\tau_t - \psi_\varphi) - g\beta,$$

где правые и левые части рассматриваются как многочлены от переменной φ , причем $(\tau_t - \psi_\varphi)u + \beta$ не зависит от φ . Тогда

$$(c_0)_u = 0, \quad u = \overline{1, 4}.$$

Таким образом, выражение для ψ упрощается:

$$\psi = c_0\varphi + \chi(x, y, z, t), \quad \psi_\varphi = c_0 = \text{const.} \quad (7.2)$$

Тогда в силу (4.1, 5.1) имеем:

$$\alpha_x = \beta_y = \gamma_z = \frac{1}{2}(\tau_t + \psi_\varphi) = \frac{1}{2}(\tau_t + c_0),$$

причем $\tau_t + c_0$ зависит лишь от t . А значит, коэффициенты α , β и γ можно представить в виде

$$\alpha = \frac{1}{2}(\tau_t + c_0)x + \sigma(y, z, t), \quad (7.3)$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\tau_t + c_0)y + \rho(x, z, t), \quad (7.4)$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(\tau_t + c_0)z + \omega(x, z, t), \quad (7.5)$$

где $\sigma(y, z, t)$, $\rho(x, z, t)$ и $\omega(x, z, t)$ — некоторые функции. Из (7.3—7.5) и (4.8) следует, что

$$\alpha_{ss}^r = 0, \quad r, s = \overline{2, 4}.$$

Значит, каждая из функций $\sigma(y, z, t)$, $\rho(x, z, t)$, $\omega(x, z, t)$ линейна по переменным x , y , z , тогда

$$\sigma(y, z, t) = \sigma_1(t)yz + \sigma_2(t)y + \sigma_3(t)z + \sigma_4(t), \quad (7.6)$$

$$\rho(x, z, t) = \rho_1(t)xz + \rho_2(t)x + \rho_3(t)z + \rho_4(t), \quad (7.7)$$

$$\omega(x, z, t) = \omega_1(t)xy + \omega_2(t)x + \omega_3(t)y + \omega_4(t). \quad (7.8)$$

Из равенств (4.1) с учетом (7.3—7.8) вытекают следующие соотношения на коэффициенты σ_u , ρ_u , ω_u ($u = \overline{1, 4}$):

$$\sigma_1(t) = -\rho_1(t), \quad \sigma_2(t) = -\rho_2(t), \quad (7.9)$$

$$\sigma_1(t) = -\omega_1(t), \quad \sigma_3(t) = -\omega_2(t), \quad (7.10)$$

$$\rho_1(t) = -\omega_1(t), \quad \rho_3(t) = -\omega_3(t), \quad (7.11)$$

из которых, в свою очередь, следует, что

$$\sigma_1(t) = \rho_1(t) = \omega_1(t) = 0. \quad (7.12)$$

С учетом (7.6—7.12) формулы (7.3—7.5) принимают вид

$$\alpha = \frac{1}{2}(\tau_t + c_0)x + \sigma_2(t)y + \sigma_3(t)z + \sigma_4(t), \quad (7.13)$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\tau_t + c_0)y - \sigma_2(t)x + \rho_3(t)z + \rho_4(t), \quad (7.14)$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(\tau_t + c_0)z - \sigma_3(t)x - \rho_3(t)y + \omega_4(t). \quad (7.15)$$

Из (4.4) и (7.1) получаем, что

$$\Delta\chi = 0. \quad (7.16)$$

8. Найдем выражение для функции $\chi(x, y, z, t)$. В силу (5.2) имеем:

$$\chi_x = \frac{1}{2}\tau''x + \sigma'_2y + \sigma'_3z + \sigma'_4, \quad (8.1)$$

$$\chi_y = \frac{1}{2}\tau''y - \sigma'_2x + \rho'_3z + \rho'_4, \quad (8.2)$$

$$\chi_z = \frac{1}{2}\tau''z - \sigma'_3x - \rho'_3y + \omega'_4. \quad (8.3)$$

Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по t . С учетом равенства смешанных частных производных $\chi_{rs} = \chi_{sr}$, где $r \neq s$, формулы (8.1—8.3) дают

$$\sigma'_2 = \sigma'_3 = \rho'_3 = 0.$$

Значит, $\sigma_2, \sigma_3, \rho_3$ — константы. Обозначим их следующим образом:

$$\sigma_2 = c_{11}, \quad \sigma_3 = c_{12}, \quad \rho_3 = c_{13}. \quad (8.4)$$

Тогда формулы (8.1—8.3) упрощаются:

$$\chi_x = \frac{1}{2}\tau''x + \sigma'_4, \quad \chi_y = \frac{1}{2}\tau''y + \rho'_4, \quad \chi_z = \frac{1}{2}\tau''z + \omega'_4.$$

Заметим, что в силу (7.16) они приводят к равенству

$$\tau'' = 0.$$

Следовательно, τ — линейная функция, то есть τ имеет вид

$$\tau = c_2t + c_3, \quad (c_2, c_3 = \text{const}) \quad (8.5)$$

и при этом $\chi(x, y, z, t)$ представима в виде

$$\chi(x, y, z, t) = \sigma'_4(t)x + \rho'_4(t)y + \omega'_4(t)z + \theta(t), \quad (8.6)$$

где $\theta(t)$ — некоторая функция. Тогда

$$\chi_t = \sigma''_4 x + \rho''_4 y + \omega''_4 z + \theta'.$$

С другой стороны, из (6.1) с учетом (7.14) и (8.4) получаем

$$\chi_t = \frac{1}{2}yg(c_0 - 3\tau') - g(-\sigma_2 x + \rho_3 z + \rho_4(t)).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \sigma''_4 x + \rho''_4 y + \omega''_4 z + \theta' = \\ & = \frac{1}{2}yg(c_0 - 3\tau') - g(-\sigma_2 x + \rho_3 z + \rho_4(t)). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Рассматривая (8.7) как тождество двух многочленов от переменных x, y, z , приравняем коэффициенты при одинаковых степенях этих переменных:

$$x: \quad \sigma''_4 = g\sigma_2, \quad (8.8)$$

$$y: \quad \rho''_4 = \frac{1}{2}g(c_0 - 3\tau'), \quad (8.9)$$

$$z: \quad \omega''_4 = -g\rho_3, \quad (8.10)$$

$$1: \quad \theta' = -g\rho_4. \quad (8.11)$$

Из (8.8—8.9) вытекает, что $\sigma_4, \rho_4, \omega_4$ и θ имеют вид

$$\sigma_4 = \frac{1}{2}g\sigma_2 t^2 + c_4 t + c_5, \quad (8.12)$$

$$\rho_4 = \frac{g}{4}c_1 t^2 + c_6 t + c_7, \quad (8.13)$$

$$\omega_4 = -\frac{1}{2}g\rho_3 t^2 + c_8 t + c_9, \quad (8.14)$$

$$\theta = -\frac{g^2}{12}c_1 t^3 - \frac{1}{2}gc_6 t^2 - gc_7 t + c_{10}, \quad (8.15)$$

где $c_4, \dots, c_{10}$ — константы, причем

$$c_1 = c_0 - 3c_2. \quad (8.16)$$

9. Выражения (7.13—7.15) для α , β , γ с учетом (8.16) принимают вид

$$\alpha = \frac{1}{2}(4c_2 + c_1)x + c_{11}y + c_{12}z + \frac{1}{2}gc_{11}t^2 + c_4t + c_5, \quad (9.1)$$

$$\beta = \frac{1}{2}(4c_2 + c_1)y - c_{11}x + c_{13}z + \frac{g}{4}c_1t^2 + c_6t + c_7, \quad (9.2)$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(4c_2 + c_1)z - c_{12}x - c_{13}y - \frac{1}{2}gc_{13}t^2 + c_8t + c_9, \quad (9.3)$$

а выражение (7.2) для ψ в силу (8.6, 8.12—8.16) принимает вид

$$\begin{aligned} \psi = & (3c_2 + c_1)\varphi + (g\sigma_2t + c_4)x + \left(\frac{g}{2}c_1t + c_6\right)y + \\ & + (-g\rho_3t + c_8)z - \frac{g^2}{12}c_1t^3 - \frac{1}{2}gc_6t^2 - gc_7t + c_{10}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Подставляя найденные выражения в (3.1) и группируя слабые при одинаковых константах, мы выделяем базис алгебры Ли $\mathfrak{L}$ инфинитезимальных симметрий задачи (1.2—1.4):

$$X = \sum_{i=1}^{13} c_i X_i,$$

где

$$X_1 = \frac{x}{2}\partial_x + \left(\frac{1}{2}y + \frac{g}{4}t^2\right)\partial_y + \frac{z}{2}\partial_z + \left(\varphi + \frac{gt}{2}y - \frac{g^2}{12}t^3\right)\partial_\varphi,$$

$$X_2 = 2x\partial_x + 2y\partial_y + 2z\partial_z + t\partial_t + 3\varphi\partial_\varphi,$$

$$X_3 = \partial_t, \quad X_4 = t\partial_x + x\partial_\varphi, \quad X_5 = \partial_x,$$

$$X_{11} = \left(y + \frac{1}{2}gt^2\right)\partial_x - x\partial_y + gtx\partial_\varphi,$$

$$X_{12} = z\partial_x - x\partial_z,$$

$$X_{13} = z\partial_y + \left(-y - \frac{1}{2}gt^2\right)\partial_z - gtz\partial_\varphi,$$

$$X_6 = t\partial_y + \left(y - \frac{1}{2}gt^2\right)\partial_\varphi,$$

$$X_7 = \partial_y - gt\partial_\varphi, \quad X_8 = t\partial_z + z\partial_\varphi,$$

$$X_9 = \partial_z, \quad X_{10} = \partial_\varphi.$$

Для удобства перейдем к новому базису:

$$V_1 = X_5, \quad V_2 = X_3, \quad V_3 = X_{10}, \quad V_4 = X_7,$$

$$V_5 = X_4, \quad V_6 = X_6, \quad V_7 = 4X_1 - X_2,$$

$$V_8 = X_{11}, \quad V_9 = \frac{1}{2}X_2, \quad V_{10} = X_{12},$$

$$V_{11} = X_{13}, \quad V_{12} = X_8, \quad V_{13} = X_9.$$

Выражения для новых базисных инфинитезимальных симметрий имеют вид

$$V_1 = \partial_x, \quad V_2 = \partial_t, \quad V_3 = \partial_\varphi, \quad (9.5)$$

$$V_4 = \partial_y - gt\partial_\varphi, \quad (9.6)$$

$$V_5 = t\partial_x + x\partial_\varphi, \quad (9.7)$$

$$V_6 = t\partial_y + \left(y - \frac{1}{2}gt^2\right)\partial_\varphi, \quad (9.8)$$

$$V_7 = gt^2\partial_y - t\partial_t + \left(\varphi + 2gty - \frac{g^2}{3}t^3\right)\partial_\varphi, \quad (9.9)$$

$$V_8 = \left(y + \frac{1}{2}gt^2\right)\partial_x - x\partial_y + gtx\partial_\varphi, \quad (9.10)$$

$$V_9 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + \frac{t}{2}\partial_t + \frac{3}{2}\varphi\partial_\varphi, \quad (9.11)$$

$$V_{10} = z\partial_x - x\partial_z, \quad (9.12)$$

$$V_{11} = z\partial_y + \left(-y - \frac{1}{2}gt^2\right)\partial_z - gtz\partial_\varphi, \quad (9.13)$$

$$V_{12} = t\partial_z + z\partial_\varphi, \quad (9.14)$$

$$V_{13} = \partial_z. \quad (9.15)$$

Отметим, что каждое из найденных векторных полей является генератором соответствующей однопараметрической группы симметрий задачи (1.2—1.4). А именно, V_1 и V_{13} порождают горизонтальные сдвиги, V_2 — сдвиги по времени, V_3 — сдвиги

значения потенциала, V_4 — вертикальные сдвиги, V_{10} — горизонтальные вращения, V_5 и V_{12} — горизонтальные галилеевы бусты, V_6 — вертикальные галилеевы бусты, V_7 — вертикальные ускорения, V_8 и V_{11} — вращения, компенсируемые гравитацией (gravity-compensated rotations), V_9 — масштабирование.

Исследуем полученную алгебру Ли $\mathfrak{L}$ на разрешимость. Для этого приведем здесь попарные коммутаторы найденных векторных полей. Все ненулевые коммутаторы вида $[V_i, V_j]$, где $1 \leq i < j \leq 13$, имеют вид

$$\begin{aligned}
 [V_1, V_5] &= V_3, \quad [V_1, V_8] = -V_4, \quad [V_1, V_9] = V_1, \\
 [V_1, V_{10}] &= -V_{13}, \quad [V_2, V_4] = -gV_3, \quad [V_2, V_5] = V_1, \\
 [V_2, V_6] &= V_4, \quad [V_2, V_7] = 2gV_6 - 2V_2, \quad [V_2, V_8] = gV_5, \\
 [V_2, V_9] &= \frac{1}{2}V_2, \quad [V_2, V_{11}] = -gV_{12}, \quad [V_2, V_{12}] = V_{13}, \\
 [V_3, V_7] &= V_3, \quad [V_3, V_9] = \frac{3}{2}V_3, \quad [V_4, V_6] = V_3, \\
 [V_4, V_8] &= V_1, \quad [V_4, V_9] = V_4, \quad [V_4, V_{11}] = -V_{13}, \\
 [V_5, V_7] &= V_5, \quad [V_5, V_8] = -V_6, \quad [V_5, V_9] = \frac{1}{2}V_5, \\
 [V_5, V_{10}] &= -V_{12}, \quad [V_6, V_7] = V_6, \quad [V_6, V_8] = V_5, \quad [V_6, V_9] = \frac{1}{2}V_6, \\
 [V_6, V_{11}] &= -V_{12}, \quad [V_7, V_{12}] = -V_{12}, \quad [V_8, V_{10}] = V_{11}, \\
 [V_8, V_{11}] &= -V_{10}, \quad [V_9, V_{12}] = -\frac{1}{2}V_{12}, \quad [V_9, V_{13}] = -V_{13}, \\
 [V_{10}, V_{11}] &= V_8, \quad [V_{10}, V_{12}] = -V_5, \quad [V_{10}, V_{13}] = -V_1, \\
 [V_{11}, V_{12}] &= -V_6, \quad [V_{11}, V_{13}] = -V_4, \quad [V_{12}, V_{13}] = -V_3.
 \end{aligned}$$

Остальные коммутаторы вида $[V_i, V_j]$, где $1 \leq i < j \leq 13$, являются нулевыми векторными полями. Тогда

$$\mathfrak{L}' = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] = \langle V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_8, V_{10}, V_{11}, V_{12}, V_{13} \rangle,$$

где $\mathfrak{L}'$ — коммутатор алгебры Ли $\mathfrak{L}$, причем угловые скобки обозначают линейную оболочку элементов. Остальные члены производного ряда имеют вид

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}^{(n)} &:= (\mathfrak{L}^{(n-1)})' = \\ &= \langle V_1, V_3, V_4, V_5, V_6, V_8, V_{10}, V_{11}, V_{12}, V_{13} \rangle, \quad n \geq 2.\end{aligned}$$

Значит, данная алгебра Ли не является разрешимой. Таким образом, доказана

Теорема. *Инфинитезимальные симметрии трехмерной задачи (1.2—1.4) образуют 13-мерную неразрешимую алгебру Ли, базис которой образован векторными полями (9.5—9.15).*

Замечание 6. Данная теорема согласуется с результатом, приведенным без доказательства в работе [7, с. 150].

Список литературы

1. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М., 1983.
2. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978.
3. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М., 1989.
4. *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики* / Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М. [и др.] ; под ред. А.М. Виноградова, И.С. Красильщика. М., 1997.
5. *Фридман А.* Вариационные принципы и задачи со свободными границами. М., 1990.
6. *Шамардина Е.Р.* Нахождение симметрий для задачи о волнах на воде с поверхностным натяжением // ДГМФ. 2022. Вып. 53. С. 135—147. doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-13.
7. *Brooke Benjamin T., Olver P.J.* Hamiltonian structure, symmetries and conservation laws for water waves // J. Fluid Mech. 1982. Vol. 125. P. 137—185.
8. *Guyenne P., Parau E.I.* Forced and unforced flexural gravity solitary waves // Nonlinear interfacial wave phenomena from the Micro- to the Macro-scale : Procedia IUTAM. 2014. Vol. 11. P. 44—57.

9. Mitsotakis D., Dutykh D., Li Q., Peach E. On some model equations for pulsatile flow in viscoelastic vessels // *Wave Motion*. 2019. Vol. 90. P. 139—151.

10. Plotnikov P. I., Toland J. F. Modelling nonlinear hydroelastic waves // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2011. Vol. 369, № 1947. P. 2942—2956.

Для цитирования: Кулешов А. В. Симметрии одной задачи гидродинамики со свободной границей // *ДГМФ*. 2025. № 56. С. 83—106. <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-8>.



ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) ([HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/))

MSC 2010: 76M60, 58J70

A. V. Kuleshov 

Immanuel Kant Baltic Federal University

14 A. Nevskogo Str., Kaliningrad, 236016, Russia

arturkuleshov@yandex.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-8

Symmetries of some free boundary problem in hydrodynamics

Submitted on May10, 2025

The free boundary problem of water waves in three space dimensions without surface tension is considered. The problem consists of the Laplace equation on the velocity potential, and of the kinematic and dynamic boundary conditions. T. Brooke Benjamin and P. Olver have showed that the methods of group analysis of differential equations can be applied to such problems. The group analysis is based on finding infinitesimal symmetries inherent to the problem. The key point is that each infinitesimal symmetry generates a one-parameter group of symmetries, and that transforming a given solution of the problem by any of the symmetries produces a continuous family of other solutions. The aim of the present paper is demonstration of application of the group analysis to the problem. The base infinitesimal symmetries of the problem

are deduced, their physical meanings are revealed, and their commutators are computed. It is shown that all the infinitesimal symmetries of the problem form a 13-dimensional non-solvable Lie algebra, and the corresponding Lie group of symmetries is generated by horizontal and vertical translations, time translation, variation of base-level for potential, horizontal rotations, horizontal and vertical Galilean boosts, vertical acceleration, gravity-compensated rotations, and scaling. All the results agree with the ones obtained by T. Brooke Benjamin and P. Olver.

Keywords: free boundary problem, group analysis, infinitesimal symmetry, Lie algebra

References

1. *Ibragimov, N.Kh.*: Transformation groups applied to mathematical physics. Springer (1984).
2. *Ovsianikov, L. V.*: Group analysis of differential equations. N. Y. (1982).
3. *Olver, P.J.*: Applications of Lie groups to differential equations. Springer, 1986.
4. *Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics.* Bocharov, A. V., Chetverikov, V.N., Duzhin, S. V. [et al.]. AMS (1999).
5. *Friedman, A.*: Variational Principles and Free Boundary Problems. John Wiley and Sons, Inc. (1982).
6. *Shamardina, E.R.*: Finding symmetries for the problem of water waves with surface tension. DGMF, 53, 135—147 (2022). doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-13.
7. *Brooke Benjamin, T., Olver, P.J.*: Hamiltonian structure, symmetries and conservation laws for water waves. J. Fluid Mech., 125, 137—185 (1982).
8. *Guyenne, P., Parau E.I.*: Forced and unforced flexural gravity solitary waves. Nonlinear interfacial wave phenomena from the Micro- to the Macro-scale. Procedia IUTAM, 11, 44—57 (2014).
9. *Mitsotakis, D., Dutykh, D., Li, Q., Peach, E.*: On some model equations for pulsatile flow in viscoelastic vessels. Wave Motion, 90, 139—151 (2019).

10. *Plotnikov, P.I., Toland, J.F.*: Modelling nonlinear hydroelastic waves. *Phil. Trans. R. Soc. A*, **369**:1947, 2942—2956 (2011).

For citation: Kuleshov, A.V. Symmetries of some free boundary problem in hydrodynamics. *DGMF*, 56, 83—106 (2025). <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-8>.



SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE ([HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/))