УДК 514.76

О ГЕОМЕТРИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ И СТРУКТУРНОЙ ФОРМ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Е. В. Р о д и н а

(Московский государственный педагогический университет)

Исследована взаимосвязь между свойствами замкнутости и козамкнутости фундаментальной и структурной форм некоторых типов почти контактных многообразий и свойствами расширений таких многообразий.

Пусть M - гладкое многообразие, $\mathfrak{X}(M)$ - модуль гладких векторных полей на M, d - оператор внешнего дифференцирования, g=<·,·> - риманова структура, δ - соответствующий ей оператор кодифференцирования. Все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞.

Определение [1]. Почти контактной метрической структурой, короче, АС-структурой, на M называется совокупность {ξ,η,Φ,g} тензорных полей на M, где ξ - векторное поле, называемое структурным вектором, η - 1-форма, называемая структурной формой, Φ - тензор типа (1,1), называемый структурным оператором. При этом 1) η(ξ)=1, 2) η·Φ=0, 3) Φ(ξ)=0, 4) $\Phi^2 = -\mathrm{id} + \xi \otimes \eta$, 5) <ΦX,ΦY>=<X,Y>-η(X)η(Y), X,Y∈$\mathfrak{X}$(M). Многообразие, на котором фиксирована АС-структура, называется почти контактным метрическим многообразием (короче АС-многообразием). На таком многообразии внутренним образом определяется 2-форма Ω(X,Y)=<X,ΦY>, называемая фундаментальной формой АС-структуры.

Известно [1], что если M - АС-многообразие, то на многообразии Mx R внутренним образом индуцируется почти эрмитова структура $\{J, \tilde{g}\}$, $J^2 = -\mathrm{id}$, <JX,JY>=<X,Y>, X,Y∈$\mathfrak{X}$ (Mx R). Назовем такое многообразие линейным расширением исходного АС-многообразия.

Теорема 1. Пусть M - АС-многообразие, линейное расширение которого принадлежит одному из следующих классов в классификации Грея-Хервеллы: 1) W_3, 2) {0}. Тогда структурная форма многообразия M козамкнута.

Доказательство. В.Ф.Кириченко в [1] получил первую группу структурных уравнений АС-структуры на пространстве присоединенной G-структуры:

$$d\theta^a = \theta^a_b \wedge \theta^b + C^{ab}_c \theta^c \wedge \theta_b + C^{abc} \theta_b \wedge \theta_c + C^{ab} \theta_b \wedge \theta^o + C^a_b \theta^b \wedge \theta^o,$$

$$d\theta_a = -\theta^b_a \wedge \theta_b + C^c_{ab} \theta_c \wedge \theta^b + C_{abc} \theta^b \wedge \theta^c + C_{ab} \theta^b \wedge \theta^o + \tilde{C}^b_a \theta_b \wedge \theta^o, \quad (1)$$

$$d\theta^o = D_{ab} \theta^a \wedge \theta^b + D^{ab} \theta_a \wedge \theta_b + D^b_a \theta^a \wedge \theta_b + D_a \theta^a \wedge \theta^o + D^a \theta_a \wedge \theta^o \, (a,b,c=\overline{1,n}).$$

Докажем теорему, например, для случая 2). Пусть линейное расширение АС-структуры принадлежит классу {0} в классификации Грея-Хервеллы [3]. Тогда с учетом связи, установленной в работе [4], для АС-структуры будут выполняться следующие соотношения на пространстве G-структуры:

$$C_{abc} = C_{ab} = C^c_{ab} = \tilde{C}^b_a = D_{ab} = D_a = D^b_a = 0. \qquad (2)$$

Докажем козамкнутость формы η. Как известно [2],

$$\delta\eta = \eta_{i,j}g^{ij} = \sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{o,a} - \sqrt{-1}\Phi^a_{o,a}, \qquad (3)$$

где i,j,k=o,a,$\hat{a}$, a=$\overline{1,n}$, $\hat{a}$=a+n, $\{\Phi^i_{j,k}\}$, $\{g^{jk}\}$ - компоненты тензоров Φ и g на пространстве G - структуры. Из работы [4] и формул (2) имеем: 1) $C^a_a = -\sqrt{-1}\Phi^a_{o,a} = 0$, т.е. $\Phi^a_{o,a} = 0$, 2) $2C_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{b,o} + \sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{o,b} = 0$, $D_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^o_{[a,b]} = 0$. Отсюда следует, что $\Phi^{\hat{b}}_{o,a} = 0$. В частности, $\Phi^{\hat{a}}_{o,a} = 0$. Следовательно, из формул (3) получим δη=0, т.е. η козамкнута.

Аналогично доказывается случай 1).

Теорема 2. Пусть M - АС-многообразие, линейное расширение которого принадлежит одному из следующих классов в классификации Грея-Хервеллы: 1) W_2, 2) {0}. Тогда структурная форма многообразия M козамкнута.

Доказательство. Докажем для случая 2). На пространстве G-структуры АС-многообразия имеет место равенство dη=dθ^o. Тогда из (1) получим: dη=0 тогда и только тогда, когда

$$D_{ab} = D^b_a = D_a = 0. \qquad (4)$$

Согласно (2), для данной АС-структуры η замкнута, т.е. dη=0.

Аналогично доказывается случай 1).

Известно [5], что форма замкнутая и козамкнутая одновременно обязательно будет гармоничной.

Следствие. Пусть M - АС-многообразие, линейное расширение которого принадлежит классу {0} в классификации Грея-Хервеллы. Тогда структурная форма многообразия M гармонична, а значит первое число Бетти многообразия M больше или равно 1.

Теорема 3. Пусть M - АС-многообразие, линейное расширение которого принадлежит одному из следующих классов в классификации Грея-Хервеллы: 1) $W_1 \oplus W_3$, 2) $W_1 \oplus W_2$, 3) {0}. Тогда фундаментальная форма многообразия M козамкнута.

Доказательство. Докажем для случая 3). Как известно [2], $(\delta\Omega)_i = \Phi^i_{j,k}g^{jk}$, i,j,k=o,a,$\hat{a}$, a=$\overline{1,n}$, $\hat{a}$=a+n. Отсюда имеем:

$$(\delta\Omega)_a = \Phi^a_{\hat{b},b} + \Phi^a_{o,o},\ (\delta\Omega)_{\hat{a}} = \Phi^{\hat{a}}_{b,b} + \Phi^{\hat{a}}_{o,o},\ (\delta\Omega)_o = \Phi^o_{a,\hat{a}} + \Phi^o_{\hat{a},a}.$$

Как показано в работе [4], это равносильно следующему:

$$(\delta\Omega)_a = 2\sqrt{-1}C^{ab}_b + \sqrt{-1}D^a, (\delta\Omega)_{\hat{a}} = \sqrt{-1}\left(2C^b_{ab} + D_a\right), (\delta\Omega)_o = -\sqrt{-1}D^a_a. \qquad (5)$$

Следовательно, с учетом (2), получим δΩ=0, т.е. Ω козамкнута.

Аналогично доказываются случаи 1) и 2).

Теорема 4. Пусть M - AC-многообразие, линейное расширение которого принадлежит одному из следующих классов в классификации Грея-Хервеллы: 1) W_2, 2) $\{0\}$. Тогда фундаментальная форма многообразия M гармонична, а значит второе число Бетти многообразия больше или равно 1.

Доказательство. Докажем для случая 2). Как известно [1], фундаментальная форма Ω на пространстве присоединенной G-структуры записывается в виде $\Omega = -2\sqrt{-1}\theta^a \wedge \theta_a$. Дифференцируя данное уравнение внешним образом, с учетом (1) и линейной независимости базисных форм, получим, что $\delta\Omega$=0 тогда и только тогда, когда

$$C^c_{ab} = C_{[abc]} = C_{[ab]} = 0,\ C^b_a = -\tilde{C}^b_a. \quad (6)$$

Согласно (2), для данной AC-структуры форма Ω замкнута, т.е. $\delta\Omega$=0. Из предыдущей теоремы имеем, что Ω козамкнута, следовательно форма Ω гармонична, а значит второе число Бетти многообразия больше или равно 1 [5].

Аналогично доказывается случай 1).

Теорема 5. Пусть M - AC-многообразие, линейное расширение которого удовлетворяет равенству $\delta\tilde{\Omega} \circ J = 0$ и принадлежит одному из следующих классов в классификации Грея-Хервеллы: 1) $W_1 \oplus W_4$, 2) $W_2 \oplus W_4$, где J - почти комплексная структура на линейном расширении, $\tilde{\Omega}$ - его фундаментальнаяформа. Тогда структурная и фундаментальная формы многообразия M являются: 1) гармоничной и козамкнутой соответственно, а значит первое число Бетти многообразия M больше или равно 1, 2) замкнутой и гармоничной соответственно, а значит второе число Бетти многообразия M больше или равно 1.

Доказательство. Докажем для случая 2). Пусть линейное расширение AC-структуры принадлежит классу $W_2 \oplus W_4$ в классификации Грея-Хервеллы [3]. Тогда с учетом связи, установленной в работе [4], для AC-структуры будут выполняться следующие соотношения:

$$C^c_{ab} = D_{[a}\delta^c_{b]},\ \tilde{C}^b_a = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\ D_o\delta^b_a,\ D^b_a = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}(D_o + D^o),\ D_a = D_a,$$

$C_{[abc]} = C_{[ab]} = D_{ab} = 0$, где $D = \delta\tilde{\Omega} \circ J$, $\tilde{\Omega}$ - фундаментальная форма линейного расширения, J - почти комплексная структура на линейном расширении. Из формул (5) и (6) легко видеть, что Ω гармонична тогда и только тогда, когда D = 0. Аналогично, из (4) следует, что η замкнута тогда и только тогда, когда D = 0.

Библиографический список

1. *Кириченко В.Ф.* // Проблемы геометрии. М., 1986. Т.18. С.25-71.

2. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М., 1964.

3. *Gray A., Hervella L.* // Ann. Math. Pure ed Appl. 1980. V. 123. № 4. P. 35-58.

4. *Родина Е.В.* // МГПУ им. В.И.Ленина. 25с. Деп. в ВИНИТИ 26.06.1996, № 2110-В96.

5. *Лихнерович А.* Теория связностей в целом и группы голономии. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

E. V. R o d i n a

ON A GEOMETRY OF FUNDAMENTAL AND STRUCTURAL FORMS OF ALMOST CONTACT MANIFOLDS

An interconnection between properties of closure and coclosure of fundamental and structural forms of some types of almost contact manifolds on one hand and properties of linear extension of such manifolds on the other hand has been investigated.

УДК 514.7

ДОПОЛНЕНИЕ К ОДНОЙ РАБОТЕ Ж.-П. БУРГИНЬОНА

С. Е. С т е п а н о в, В. В. Р о д и о н о в

(Владимирский государственный педагогический университет)

1. Введение. В ставшей уже классической монографии [1] был опубликован доклад Ж.-П.Бургиньона, в котором, в частности, рассматривались фундаментальные дифференциальные операторы на пространстве сечений $C^\infty\Lambda^k M$ и $C^\infty S^2_0 M$ расслоений внешних дифференциальных k-форм $\Lambda^k M$ и симметрических бесследовых 2-форм $S^2_0 M$ над римановым многообразием M. В первом случае были найдены два фундаментальных оператора и указано на существование третьего. Далее Ж.-П.Бургиньон писал: “Помимо случая k=1, он не имеет простой геометрической интерпретации”. В статье [2] одного из авторов было доказано, что ядро третьего фундаментального оператора составляют открытые и изученные еще до упомянутого доклада конформно-киллинговые k-формы [3], [4]. Во втором случае Ж.-П.Бургиньон выписал все три оператора и охарактеризовал первый, но при этом заметил следующее: “Ядра двух других фундаментальных операторов не имеют простой геометрической интерпретации”. В настоящей заметке мы перенесли рассуждения на псевдориманово многообразие M. Нашли заново три фундаментальных дифференциальных оператора на $C^\infty S^2_0 M$ и дали геометрическую интерпретацию ядру каждого из них.

2.Фундаментальные операторы на $C^\infty S^2_0 M$. Пусть M будет m-мерным псевдоримановым многообразием с метрикой g сигнатуры (s,r) и связностью Леви-Чивита ∇. Обозначим через $S^2_0 M$ расслоение симметрических бесследовых 2-форм. Пусть

$$D: C^\infty S^2_0 M \to C^\infty(T^*M \otimes S^2_0 M)$$