ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.11 1980

В.П.Цапенко

О КОНГРУЭНЦИЯХ $(P, Q)_{2,2}$, ПОРОЖДЕННЫХ КВАДРИКОЙ И ТОЧКОЙ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В данной работе продолжено изучение конгруэнций $(P, Q)_{2,2}$ пар фигур, порожденных квадрикой Q и неинцидентной ей точкой P трехмерного проективного пространства, начатое в [1].

Конгруэнция $(P, Q)_{2,2}$ была отнесена к геометрически фиксированному реперу $R=\{\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3\}$, в котором вершина A_0 помещена в точку P, вершины A_1 и A_2 принадлежат касательной плоскости к поверхности (A_0) в точке A_0 и являются точками пересечения поляры точки A_0 относительно коники C с этой коникой. (Коникой C названа линия пересечения касательной плоскости к поверхности (A_0) с квадрикой Q). Вершина A_3 помещена в полюс плоскости $A_0A_1A_2$ относительно квадрики Q.

Уравнение квадрики Q и система дифференциальных уравнений конгруэнции $(P,Q)_{2,2}$ записывались соответственно в виде:

$$F \equiv (x^0)^2 + (x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = \gamma_{3k}^0 \omega^k, \quad \omega_i^j = \gamma_{ik}^j \omega^k, \\ \omega_i^0 = \gamma_{ik}^0 \omega^k, \quad \omega_3^i = \gamma_{3k}^i \omega^k, \quad \omega_i^3 = \gamma_{ii}^3 \omega^i + a\omega^j, \\ \omega_0^0 - \omega_3^3 = \alpha_k \omega^k, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_0^0 = \beta_k \omega^k. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем $i, j, k = 1,2;\ i \neq j$; суммирование по i и j не производится, а также линейно независимые формы $\omega_0^i \overset{def}{=} \omega^i$ приняты в качестве базисных. Фокальное многообразие конгруэнции (Q) квадрик Q определяется системой уравнений:

$$F = 0,$$

$$F_i \equiv \gamma_{1i}^2 (x^1)^2 + \gamma_{2i}^1 (x^2)^2 + \alpha_i (x^3)^2 + (1 - \gamma_{ji}^0) x^0 x^j - \gamma_{ii}^0 x^0 x^i - \gamma_{3i}^0 x^0 x^3 + \beta_i x^1 x^2 + (\gamma_{3i}^j - \gamma_{ii}^3) x^i x^3 + (\gamma_{3i}^i - a) x^j x^3 = 0.$$

Инвариантные квадрики, определяемые уравнениями $F_i = 0$, были обозначены соответственно Q_1 и Q_2.

Определение 1. Конгруэнцией $(P, Q)_{2,2}^1$ назовем такую конгруэнцию $(P,Q)_{2,2}$, каждая ассоциированная квадрика Q_i которой представляет собой сдвоенную плоскость $x^i = 0$.

Теорема 1. Конгруэнция $(P,Q)_{2,2}^1$ существует и определяется с произволом двух функций одного аргумента.

Доказательство. В силу определения конгруэнции из уравнений $F_i = 0$ имеем следующие условия:

$$\gamma_{11}^2 \neq 0, \ \gamma_{22}^1 \neq 0, \ \gamma_{ji}^i = \alpha_i = \gamma_{ii}^0 = 1 - \gamma_{ij}^0 = \gamma_{3i}^0 = \beta_i = \gamma_{3i}^j - \gamma_{ii}^3 = \gamma_{3i}^i - a = 0,$$

учитывая которые в уравнениях системы (2), получаем уравнения Пфаффа:

$$\begin{gathered} \omega_0^0 = \omega_3^3, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_0^0 = 0, \quad \omega_i^0 = \omega^j, \\ \omega_3^0 = 0, \quad \omega_i^j = \gamma_{ii}^j \omega^i, \quad \omega_3^i = \omega_j^3 = a\omega^i + \gamma_{jj}^3 \omega^j. \end{gathered} \tag{3}$$

Проводя последнюю нормировку $\gamma_{11}^2 = 1$ и продолжая систему (3), приходим к системе дифференциальных уравнений конгруэнции $(P, Q)_{2,2}^1$:

$$\begin{gathered} \omega_0^3 = 0, \ \omega_3^0 = 0, \ \omega_3^3 = 0, \ da = 0, \ \omega_i^0 = \omega^j, \ \omega_0^0 = 0, \\ \omega_3^i = \omega_j^3 = a\omega^i, \ \omega_1^2 = \omega^1, \ \omega_2^1 = \Gamma_{22}^1 \omega^2, \ \omega_1^1 = -\omega_2^2 = \lambda_1 \omega^1. \end{gathered} \tag{4}$$

Анализируя систему (4), находим:
$$s_1 = 2,\ q = 2,\ S_2 = 0,\ Q = N = 2$$
и убеждаемся в справедливости теоремы.

В дальнейшем считаем константу $a \neq 0$, исключая тем самым случай, когда точка A_3 неподвижна.

Т е о р е м а 2. Конгруэнция $(P,Q)^1_{2,2}$ обладает следующими геометрическими свойствами: 1/прямые A_0A_3 образуют связку с центром в точке $\bar M = a\bar A_0 - \bar A_3$; 2/точка $A_0(A_3)$ является сдвоенным фокусом лучей прямолинейных конгруэнций $(A_0A_i)((A_iA_3))$; 3/прямолинейная конгруэнция (A_0A_3) односторонне расслояема к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2); 4/плоскость A_1A_2B, где $\bar B = \bar A_0 + a\bar A_3$, неподвижна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/Так как $d\bar M = 0$, то точка M неподвижна, откуда и следует утверждение. 2/Фокусы $\bar F^j = \lambda\bar A_0 + \mu\bar A_i$ лучей прямолинейных конгруэнций (A_0A_i) определяются уравнением $\mu^2 = 0$. Аналогично для конгруэнций (A_iA_3). 3/Условия расслоения от прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) [1] в силу системы (4) удовлетворяются тождественно. 4/Утверждение следует из выполнения условия $d(\bar A_1\bar A_2\bar B) = 0$.

О п р е д е л е н и е 2. Назовем точкой $\mathcal{D}$ общую точку квадрики Ли [2] поверхности (A_0) и ребра A_0A_3.

Уравнение квадрики Ли поверхности (A_0) имеет вид:
$$(a^2-1)(x^3)^2 + 2a(x^0x^3 - ax^1x^2) = 0, \quad (5)$$
откуда
$$\bar{\mathcal{D}} = (a^2-1)\bar A_0 - 2a\bar A_3.$$

О п р е д е л е н и е 3. Коникой $C_0(L,E)$ называется коника, лежащая в сечении квадрики Q плоскостью $A_1A_2A_3$ $(A_1A_2M,\ A_1A_2\mathcal{D})$.

Т е о р е м а 3. Поверхность (A_0) обладает свойствами: 1/ребра A_1A_2 и A_0A_3 репера являются директрисами Вильчинского [2]; 2/точки пересечения ребра A_1A_2 с касательными к коникам C, C_0, L, E в действительных фокальных точках соответствующих конгруэнций коник совпадают между собой и с точкой пересечения ребра A_1A_2 с одним из направлений Дарбу [2] поверхности (A_0); 3/квадрика Ли поверхности (A_0) и квадрика Q пересекаются по сдвоенной конике, лежащей в плоскости A_1A_2B.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/Соприкасающиеся линейные комплексы [2] поверхности (A_0) определяются уравнениями $p_{03} \pm a p_{12} = 0$, с помощью которых находим директрисы Вильчинского – прямые $\bar q_{12}$, $\bar q_{03}$. 2/Одно из направлений Дарбу поверхности (A_0) задается системой уравнений:
$$\begin{cases} x^3 = 0, \\ x^1 + b x^2 = 0, \end{cases} \qquad \text{где } b = \sqrt[3]{\gamma^1_{22}},$$
и пересекает прямую A_1A_2 в точке $G\,(0:-b:1:0)$. Конгруэнция (C) коник C имеет сдвоенную действительную фокальную точку $\bar F = \sqrt{2b}\,\bar A_0 + b\bar A_1 + \bar A_2$, конгруэнция (C_0) имеет две действительные фокальные точки $\bar F^0_{1,2} = b\bar A_1 + \bar A_2 \pm \sqrt{2b}\,\bar A_3$, действительные фокальные точки конгруэнции (L) коник L имеют вид:
$$\bar F^L_{1,2} = \pm\sqrt{2b(d^2-1)}\,\bar A_0 + bd\bar A_1 + d\bar A_2 \mp \sqrt{2b}\,\bar A_3,$$
где $d = \sqrt{a^2+1}$, и, наконец, действительные фокальные точки конгруэнции (E) – это точки
$$\bar F^E_{1,2} = \mp(d^2-2)\sqrt{2b}\,\bar A_0 + bd^2\bar A_1 + d^2\bar A_2 \pm 2\sqrt{2b(d^2-1)}\,\bar A_3.$$
Находя затем касательные к коникам C, C_0, L, E в соответствующих точках $F, F^0_{1,2}; F^L_{1,2}; F^E_{1,2}$, проверяем, что все они проходят через точку G. 3/Линия пересечения квадрики Ли поверхности (A_0) и квадрики Q определяется системой уравнений (1) и (5), которая может быть приведена к виду:

$$\begin{cases}(x^3-ax^0)^2=0,\\ (x^0)^2+(x^3)^2-2x^1x^3=0.\end{cases}$$

Учитывая, что уравнение $x^3-ax^0=0$ задает плоскость A_1A_2B, получаем требуемое.

Список литературы

1. Цапенко В.П. Об одном классе конгруэнций $(P,Q)_{2,2}$.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.10, Калининград, 1979, с.141-147.

2. Щербаков Р.Н. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск. Изд-во Томского ун-та, 1960.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.11 1980

Ю.И.Шевченко

ОБ ОБОБЩЕННОЙ НОРМАЛИЗАЦИИ КАСАТЕЛЬНО ОСНАЩЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Введено понятие обобщенной нормализации касательно оснащенной поверхности проективного пространства, которая позволяет рассматривать новые параллельные переносы касательных прямых.

Отнесем проективное n-пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_J\}$ $(I, J, K=\overline{1,n})$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA=\theta A+\omega^J A_J, \quad dA_J=\theta A_J+\omega_J^K A_K+\omega_J A,$$

где θ -форма Пфаффа, а инвариантные формы проективной группы $\omega^J, \omega_K^J, \omega_J$ удовлетворяют уравнениям [1], [2]

$$D\omega^J=\omega^K\wedge\omega_K^J, \quad D\omega_J=\omega_J^K\wedge\omega_K,$$

$$D\omega_K^J=\omega_K^I\wedge\omega_I^J+(\delta_K^J\omega_I+\delta_I^J\omega_K)\wedge\omega^I.$$

В пространстве P_n рассмотрим касательно оснащенную [3], [4] поверхность $T_k(X_m)$, т.е. m-поверхность X_m, к каждой точке которой присоединена k-плоскость T_k, принадлежащая соответствующей касательной плоскости T_m и проходящая через точку касания. Пусть индексы принимают значения: $i,j=\overline{1,m}$; $s=\overline{k+1,n}$;

$u,v,w=\overline{1,k}$; $\alpha,\beta,\gamma=\overline{k+1,m}$; $a,b,c=\overline{m+1,n}$.

Произведем специализацию подвижного репера $\{A, A_J\}$, помещая вершину A в текущую точку поверхности X_m, вершины A_u -на плоскость T_k, вершины A_α - на касатель-