УДК 514.75

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПАРЫ **Т** КОНГРУЭНЦИЙ

О.С. Р е д о з у б о в а

(Московский педагогический государственный университет)

Целью настоящей работы является объединение результатов, полученных в разные годы автором и посвященных специальным парам **Т** конгруэнций.

В трехмерном евклидовом пространстве рассматриваются две гиперболические конгруэнции $\{r_a\}$ (a=1,2), фокусы которых F_a и F_a'. Устанавливается биективное отображение одной конгруэнции на другую. При этом фокусам F_1, F_1' ставятся в соответствие фокусы F_2, F_2'.

Парами **Т** конгруэнций называются такие пары, у которых фокусы одной конгруэнции лежат в соответствующих фокальных плоскостях другой .

С парой конгруэнций $\{r_a\}$ связана конгруэнция общих перпендикуляров $\{r\}$. Прямые r пересекают соответствующие прямые r_a в точках K_a.

Присоединяется семейство подвижных ортонормированных реперов $R=\{O,\vec{e}_i\}$ (i=1,2,3) так, чтобы $O\in r$, $\vec{e}_3 \parallel r$. Направляющие орты $\vec{\eta}_a$ прямых r_a образуют с вектором $\vec{e}_1$ углы α_a. Координаты точек K_a относительно репера $\{O,\vec{e}_3\}$ обозначены через h_a. Фокусы конгруэнции r_a обозначены F_a, F_a'.

Пары **Т** конгруэнций определяются системой уравнений (2) в работе [1,с.3] :

$$\rho_1 H_2+\Omega_{23}\frac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2}-\rho_2 A_2+Q_2=0\ ,$$

$$\rho_1 A_1-\Omega_{13}\frac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2}-\rho_2 H_1-Q_1=0\ ,$$

$$\rho_1' H_2+\Omega_{23}\frac{\rho_1'\rho_2'}{h_1-h_2}-\rho_2' A_2+Q_2=0\ ,$$

$$\rho_1' A_1-\Omega_{13}\frac{\rho_1'\rho_2'}{h_1-h_2}-\rho_2' H_1-Q_1=0\ ,$$

Здесь используются следующие обозначения :

$$\Omega_a=\omega^1\cos\alpha_a+\omega^2\sin\alpha_a\ ,\ \Omega_a^*=\omega^1\sin\alpha_a-\omega^2\cos\alpha_a\ ,$$

$$\Omega_{a3}=\omega_1^3\cos\alpha_a+\omega_2^3\sin\alpha_a\ ,\ \Omega_{a3}^*=-\omega_1^3\sin\alpha_a+\omega_2^3\cos\alpha_a\ ,$$

$$H_a=\frac{\omega^3+dh_a}{h_1-h_2}\ ,\ A_a=\frac{\omega_1^2+d\alpha_a}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}\ ,\ Q_a=\frac{\Omega_a^*+h_a\Omega_{a3}^*}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}\ .$$

При условии $\rho=\rho_1'\rho_2-\rho_1\rho_2'\neq 0$ пары **Т** конгруэнций называются общими. При $\rho=0$ пары **Т** конгруэнций называются специальными.

Известно, что пары **Т** конгруэнций в общем случае определяются системой уравнений (3) из [1, с.3] и существуют с произволом двух функций двух аргументов.

Специальные пары **Т** конгруэнций удовлетворяют системе уравнений (8) [1,с.5] :

$$\begin{cases}\rho_2=t\rho_1\ ,\ \ \rho_2'=t\rho_1'\ ,\\ Q_1=\Omega_{13}\dfrac{t\rho_1\rho_1'}{h_1-h_2}\ ,\ Q_2=\Omega_{23}\dfrac{t\rho_1\rho_1'}{h_1-h_2}\ ,\\ A_1=H_1t+\Omega_{13}\dfrac{(\rho_1+\rho_1')t}{h_1-h_2}\ ,\\ A_2=H_2\dfrac{1}{t}+\Omega_{23}\dfrac{(\rho_1+\rho_1')t}{h_1-h_2}\ .\end{cases}\tag{1}$$

После дифференцирования уравнений внешним образом и подстановки туда выражений Q_a, A_a из (1), получим квадратичные уравнения, в которые входят независимые формы Ω_{a3}, а также неизвестные формы $H_a, d\rho_1, d\rho_1', dt$. Можно доказать, что решение системы уравнений определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Теорема 1. Пары **Т** конгруэнций являются специальными тогда и только тогда, когда общие перпендикуляры соответствующих прямых пары **Т** конгруэнций и пары дополнительных конгруэнций ортогональны.

Доказательство. Общие перпендикуляры соответствующих прямых пары **Т** конгруэнций параллельны вектору $\vec{e}_3$. Общие перпендикуляры пары дополнительных конгруэнций $\{F_1F_2\}$ и $\{F_1'F_2'\}$ параллельны вектору

$$\begin{aligned}\vec{e}=\vec{e}_1(h_1-h_2)\{(\rho_1-\rho_1')\sin\alpha_1-(\rho_2-\rho_2')\sin\alpha_2\}-\\ -\vec{e}_2(h_1-h_2)\{(\rho_1-\rho_1')\cos\alpha_1-(\rho_2-\rho_2')\cos\alpha_2\}-\\ -\vec{e}_3\rho\sin(\alpha_1-\alpha_2)\ .\end{aligned}\tag{2}$$

Условие перпендикулярности $\vec{e}$ и $\vec{e}_3$ имеет вид : $\rho=0$ т.е. пары **Т** конгруэнций являются специальными только при условии перпендикулярности общих перпендикуляров пары соответствующих прямых и пары дополнительных конгруэнций.

Теорема 2. Специальные пары **Т** конгруэнций есть симметричные пары, для которых расстояние между граничными точками конгруэнции общих перпендикуляров равно отношению расстояния между соответствующими прямыми к синусу угла между ними.

Доказательство. Возьмем семейство подвижных реперов $R_0 = \left\{O^0, \vec{e}_i^{\,0}\right\}$ (i=1,2,3) так, чтобы точка O^0 была центром прямой конгруэнции общих перпендикуляров, $\vec{e}_3^{\,0} \| \vec{r}$, а $\vec{e}_1^{\,0}$ и $\vec{e}_2^{\,0}$ были параллельны биссектральным плоскостям конгруэнции общих перпендикуляров. В соответствии с работой [2,с.73] имеем :

$$\omega^1 = -\hat{\rho}\,\mathrm{ctg}\varphi \cdot \omega_2^3 \ , \ \ \omega^2 = -\hat{\rho}\,\mathrm{tg}\varphi \cdot \omega_1^3 \ , \tag{3}$$

где $2\hat{\rho}$, 2φ - соответственно есть расстояние между фокусами и угол между фокальными плоскостями конгруэнции общих перпендикуляров. Подставляя (3) в третье и четвертое уравнение системы уравнений (1) , получим, в силу линейной независимости ω_1^3 , ω_2^3 ,

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 \equiv \alpha \ , \ \ h_1 = -h_2 \equiv h \ , \\ \dfrac{2\hat{\rho}}{\sin 2\varphi} = \dfrac{2h}{\sin 2\alpha} \ , \\ \rho_1 \rho_1' t = d^2 \sin(\varphi + \alpha)\sin(\varphi - \alpha) \ . \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $d = 2\hat{\rho} : \sin 2\varphi$ есть расстояние между граничными точками конгруэнции общих перпендикуляров. Из (4) следует, что специальные пары равнонаклонны к биссектральным плоскостям фокальных плоскостей конгруэнции общих перпендикуляров, у которых соответствующие прямые пары пересекают прямые этой конгруэнции в точках K_a, равноудаленных от центров этих прямых, т.е. специальные пары симметричны. Расстояние между граничными точками d конгруэнции общих перпендикуляров равно отношению расстояния $2h$ между соответствующими прямыми пары к синусу угла 2α между этими прямыми.

Теорема 3. Пары **Т** конгруэнций симметричны и не расслояемы тогда и только тогда, когда они специальные.

Доказательство. В соответствии с теоремой 5 [1,с.7] пары **Т** конгруэнций, симметричные в общем случае ($\rho \neq 0$), являются расслояемыми. Если же пары **Т** конгруэнций специальные, то по теореме 2 они всегда симметричны.

Условия расслоения пар конгруэнций имеют вид (6) [1,с.4]. Эти уравнения не удовлетворяются тождественно при подстановке выражений Q_a, A_a из системы уравнений (1). Следовательно, специальные пары**Т** конгруэнций, вообще говоря, не расслояемы.

Теорема 4. Специальные пары **Т** конгруэнций являются равнонаклонными тогда и только тогда, когда равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых.

Доказательство. Если специальные пары **Т** конгруэнций являются равнонаклонными парами, то $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_1' = \rho_2'$ [1,с.12]. Это пары **Т** конгруэнций 1-го типа. Тогда в системе уравнений (1) t=1. Фокальные расстояния соответствующих прямых есть $|\rho_a - \rho_a'|$. Следовательно, $|\rho_1 - \rho_1'| = |\rho_2 - \rho_2'|$, т.е. равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых .

Обратно, если у специальных пар **Т** конгруэнций равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых , т.е. $\rho_1 - \rho_1' = \rho_2 - \rho_2'$, то из условия $\rho_1'\rho_2 - \rho_1\rho_2' = 0$ имеем $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_1' = \rho_2'$. Значит, пары равнонаклонные.

Замечание. Так как , в соответствии с теоремой 10 [1,с.12], для пар **Т** конгруэнций 1-го типа характерно, что прямые конгруэнции общих перпендикуляров пар дополнительных конгруэнций пересекают соответствующие прямые в их центрах, то имеет место

Теорема 5. Специальные пары **Т** конгруэнций являются равнонаклонными тогда и только тогда, когда прямые конгруэнции общих перпендикуляров пары дополнительных конгруэнций пересекают соответствующие прямые в их центрах.

Теорема 6. У специальной пары **Т** конгруэнций прямые конгруэнции общих перпендикуляров пересекают в центрах соответствующие прямые тогда и только тогда, когда пара дополнительных конгруэнций есть пара 1-го типа.

Доказательство. Известно, что пару **Т** конгруэнций образуют не только конгруэнции $\{F_1F_1'\}$ и $\{F_2F_2'\}$, но и дополнительные конгруэнции $\{F_1F_2\}$ и $\{F_1'F_2'\}$. Эти пары равноправны. В соответствии с теоремой 5 у специальных пар **Т** конгруэнций пары **Т** дополнительных конгруэнций являются парами 1-го типа тогда и только тогда, когда прямые конгруэнции общих перпендикуляров пересекают соответствующие прямые пары в их центрах.

Теорема 7. Для того, чтобы прямые конгруэнции общих перпендикуляров пересекали соответствующие прямые специальной пары **Т** конгруэнций в центрах и таким же свойством обладали прямые конгруэнции общих перпендикуляров пары дополнительных конгруэнций, необходимо и достаточно, чтобы были равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых и фокальные расстояния пар дополнительных конгруэнций.

Доказательство. Если соответствующие прямые специальной пары **Т** конгруэнций пересечены в центрах прямыми конгруэнции их общих перпендикуляров, то в силу теоремы 6 пара дополнительных конгруэнций есть пара 1-го типа и, следовательно, у нее равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых.

Если же прямые конгруэнции общих перпендикуляров пары дополнительных конгруэнций пересекают в центрах соответствующие прямые этих конгруэнций, то в силу теоремы 5 специальные пары **Т** являются парами 1-го типа. У таких пар равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых. Обратное верно. Произвол существования таких пар - три функции одного аргумента.

Теорема 8. Специальная пара **T** конгруэнций имеет постоянное расстояние и постоянный угол между соответствующими прямыми тогда и только тогда, когда конгруэнция общих перпендикуляров является псевдосферической, а произведение абсцисс несоответствующих фокусов является постоянным.

Доказательство. Специальная пара **T** конгруэнций с постоянным расстоянием и постоянным углом между соответствующими прямыми определяется системой уравнений (1), к которой надо присоединить уравнения $A_1 = A_2 \equiv A$, $H_1 = H_2 \equiv H$. После некоторых преобразований имеем систему уравнений :

$$\begin{cases} Q_a = \lambda\Omega_{a3} \ , \ \ \rho_2 = t\rho_1 \ , \ \ \rho_2' = t\rho_1' \ , \\ A_1 = A_2 \equiv A \ , \ H_1 = H_2 \equiv H \ , \\ A = \alpha\Omega_{13} + \beta\Omega_{23} \ , \ H = -\beta\Omega_{13} - \alpha\Omega_{23} \ , \\ \lambda = \dfrac{t\rho_1\rho_1'}{h_1 - h_2} \ \ , \ \ \alpha = \dfrac{(\rho_1 + \rho_1')t}{h_1 - h_2} \ \ , \ \ \beta = -t\alpha \ . \end{cases} \tag{5}$$

После дифференцирования уравнений внешним образом и подстановки туда выражений A ,H и Q_a , получим систему четырех квадратичных уравнений, два из которых имеют вид :

$$d\lambda \wedge \Omega_{13} = 0 \ , \ \ d\lambda \wedge \Omega_{23} = 0 \ . \tag{6}$$

Из (6), в силу линейной независимости форм Ω_{a3} , получим $d\lambda = 0$ и, следовательно, $\lambda = \text{const}$, т.е. постоянно $\rho_1'\rho_2 = \rho_1\rho_2'$. После отнесения конфигурации к трехграннику R_0 , получим, в частности, уравнение (4). Последнее уравнение можно привести к виду :

$$\rho_1\rho_1' t = \left(\frac{2h}{\sin 2\alpha}\right)^2 \left(\sin^2\varphi - \sin^2\alpha\right) . \tag{7}$$

Так как левая часть этого уравнения постоянна , то постоянна и правая. В силу постоянства h и α постоянно и φ, т.е. постоянен угол между фокальными плоскостями конгруэнции общих перпендикуляров. Из третьего уравнения системы уравнений (4) следует постоянство $2\$$, т.е. постоянно и фокальное расстояние прямых конгруэнции общих перпендикуляров. Итак, конгруэнция $\{r\}$- псевдосферическая.

Верно и обратное. Пусть пара **T** конгруэнций - специальная конгруэнция $\{r\}$- псевдосферическая и $\rho_1'\rho_2 = \rho_1\rho_2' = \text{const}$. Уравнения системы (4) имеют место. Из уравнения (7), которое получено из (4), следует, что правая часть уравнения постоянна. Из третьего уравнения системы (4) имеем постоянство отношения $2h : \sin 2\alpha$. Тогда из постоянства правой части уравнения (7) следует постоянство α. Значит, постоянен угол между соответствующими прямыми. Из постоянства $2h : \sin 2\alpha$ следует также постоянство угла между соответствующими прямыми.

Обозначим буквой T_0 пары **Т** конгруэнций, у которых соответствующие прямые проходят через фокусы прямых конгруэнции общих перпендикуляров.

Теорема 9. Пары T_0 конгруэнций являются специальными парами **Т** тогда и только тогда, когда соответствующие прямые пары лежат в фокальных плоскостях конгруэнции общих перпендикуляров или параллельны нормалям фокальных поверхностей этой конгруэнции.

Доказательство. Допустим, что специальные пары **Т** конгруэнций являются парами T_0. Тогда имеет место система уравнений (1), определяющая специальные пары, а также система уравнений (4), к которой надо присоединить равенство $2h = 2\$$. Тогда имеем $\sin 2\varphi = \sin 2\alpha$. Отсюда следует, что либо а) $2\varphi = 2\alpha$, либо б) $2\varphi = \pi - 2\alpha$.

В случае а) из последнего уравнения (4) имеем $\rho_1\rho_1' t = 0$,т.е. $\rho_1'\rho_2 = \rho_1\rho_2' = 0$. Тогда $\rho_1' = 0$, $\rho_2' = 0$ (либо $\rho_1 = \rho_2 = 0$). Но тогда фокальные поверхности (K_a) конгруэнции общих перпендикуляров совпадают с фокальными поверхностями (F_a') конгруэнций пары (либо - с поверхностями (F_a) конгруэнций пары). В этих случаях соответствующие прямые лежат в фокальных плоскостях конгруэнции общих перпендикуляров.

В случае б) соответствующие прямые пары соответственно параллельны нормалям фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров.

Обратно, допустим, что прямые r_a пары T_0 конгруэнций лежат в касательных плоскостях фокальных поверхностей (K_a) конгруэнции общих перпендикуляров. Тогда либо $\rho_a' = 0$, либо $\rho_a = 0$ и, следовательно, $\rho_1'\rho_2 = \rho_1\rho_2'$, т.е. пары T_0 конгруэнций - специальные.

Если предположить, что прямые r_a пары T_0 конгруэнций соответственно параллельны нормалям фокальных поверхностей (K_a) конгруэнции общих перпендикуляров, т.е. $r_1 \| \vec{n}_2$ - нормали поверхности (K_2), $r_2 \| \vec{n}_1$ - нормали поверхности (K_1), то выполняются условия

$$d\vec{\eta}_1 \cdot d\vec{K}_2 = 0 \ , \ \vec{\eta}_2 \cdot d\vec{K}_1 = 0 \ .$$

Эти условия можно привести к виду

$$Q_a = \Omega_{a3} \frac{(h_1 - h_2)\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)} \ . \tag{7}$$

Если предположить, что $\rho_1'\rho_2 \neq \rho_1\rho_2'$, то пары определяются системой уравнений (3) [1, с.3], к которой надо присоединить (7). В работе [3, с.87] показано, что такие пары конгруэнций вырождаются в пары линейчатых поверхностей. Следовательно, пары T_0 конгруэнций являются специальными (т.к. $\rho_1'\rho_2 = \rho_1\rho_2'$).

Заметим, что первые из рассмотренных пар конгруэнций определяются системой уравнений (1), к которой надо присоединить условие $\left(d\vec{K}_a, \vec{\eta}_a, \vec{e}_3\right) = 0$, т.е. $Q_a = 0$. После некоторого преобразования получим систему уравнений :

$$\begin{cases} Q_a = 0\ ,\ H_1 = A_1 \dfrac{\rho_1}{\rho_2} - \Omega_{13} \dfrac{\rho_1}{h_1 - h_2}\ ,\ \rho_1 \neq 0\ ,\ \rho_2 \neq 0\ , \\ \qquad H_2 = A_2 \dfrac{\rho_2}{\rho_1} - \Omega_{23} \dfrac{\rho_2}{h_1 - h_2}\ ,\ \rho_1' = 0\ ,\ \rho_2' = 0\ . \end{cases} \tag{9}$$

Исследование системы уравнений (9) показывает, что пары **T** конгруэнций, соответствующие прямые которых лежат в касательных плоскостях фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров существует с произволом четырех функций одного аргумента.

Во втором случае, когда соответствующие прямые параллельны нормалям фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров, эти пары определяются системой уравнений (3) из [1, с.3] и (7). Можно доказать, что пары существуют с тем же произволом, что и предыдущие.

Теорема 10. Специальные пары **T** конгруэнций с постоянным расстоянием и постоянным углом между соответствующими прямыми являются парами T_0 тогда и только тогда, когда соответствующие прямые параллельны нормалям фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров.

Доказательство. Специальные пары **T** конгруэнций с постоянным расстоянием и постоянным углом между соответствующими прямыми (пары $\tilde{T}$) определяются системой уравнений (5) . Если пары $\tilde{T}$ конгруэнций есть пары T_0 конгруэнций, то по теореме 9 либо $r_a \subset \Pi_a$ (Π_a - фокальные плоскости конгруэнции общих перпендикуляров), либо соответствующие прямые параллельны нормалям фокальных поверхностей этой конгруэнции $\{r\}$. Предположим, что $r_a \subset \Pi_a$. Тогда $\rho_1' = \rho_2' = 0$. Из первых двух уравнений системы (5) $Q_a = 0$ и мы имеем систему уравнений (9). Из квадратичных уравнений этой системы имеем $\rho_1\rho_2 = 0$. Но тогда $\rho_1 = 0$ или $\rho_2 = 0$. Ни то, ни другое невозможно. Таким образом, у пары $\tilde{T}_0$ конгруэнций соответствующие прямые параллельны нормалям фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров.

Верно и обратное. Если у пары $\tilde{T}$ конгруэнций специального вида соответствующие прямые параллельны нормалям фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров, то такие пары определяются системой уравнений (5). Относительно системы реперов R_0 из первых двух уравнений системы (5) можно получить систему уравнений (4), в частности, уравнения

$$\alpha_1 = -\alpha_2 \equiv \alpha\,,\ h_1 = -h_2 \equiv h\,,\ 2\hat{\rho}\sin 2\alpha = 2h\sin 2\varphi\,. \qquad (10)$$

Если потребовать, чтобы соответствующие прямые были параллельны нормалям фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров, то $\alpha = -\varphi + \dfrac{\pi}{2}$, т.е. $\sin 2\alpha = \sin 2\varphi$, и из (10) имеем $2\hat{\rho} = 2h$. Таким образом, рассматриваемые пары конгруэнций есть пары T_0.

Теорема 11. Специальные пары **T** конгруэнций с равными произведениями абсцисс фокусов есть пары, соответствующие прямые которых пересечены в центрах прямыми конгруэнции общих перпендикуляров (а); это пары **T** конгруэнций, у которых равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых пар дополнительных конгруэнций (б).

Доказательство. Рассматриваемые пары **T** конгруэнций определяются системой уравнений (1), к которой надо присоединить равенство $\rho_1\rho_2 = \rho_1'\rho_2'$. Подставляя сюда $\rho_2 = t\rho_1, \rho_2' = t\rho_1'$ из системы уравнений (5) получим $\rho_1' = -\rho_1, \rho_2' = -\rho_2$. Из этих условий следует, что прямые конгруэнции общих перпендикуляров пересекают соответствующие прямые пары в их центрах, т.е. справедливо утверждение (а). В силу теоремы 6 выполняется условие (б).

Теорема 12. У специальной пары **T** конгруэнций с постоянным расстоянием между соответствующими прямыми и постоянным углом между ними прямые конгруэнции общих перпендикуляров пересекают соответствующие прямые в их центрах тогда и только тогда, когда таким же свойством обладают и соответствующие прямые пар дополнительных конгруэнций.

Доказательство. Специальные пары **T** конгруэнций с постоянным расстоянием и постоянным углом между соответствующими прямыми (пары $\widetilde{T}$) определяются системой уравнений (1), где $H_1 = H_2 \equiv H$, $A_1 = A_2 \equiv A$. Требование того, чтобы прямые конгруэнции общих перпендикуляров пересекали соответствующие прямые пары в их центрах имеет вид: $\rho_1' = -\rho_1, \rho_2' = -\rho_2$. Тогда $\rho_1 + \rho_1' = 0, \rho_2 + \rho_2' = 0$ и в системе уравнений (1): $A = Ht$, $H = At$. Откуда $t = 1$ (или $t = -1$). Пары **T** будут парами 1-го типа. У них равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых и в силу теоремы 5 прямые конгруэнции общих перпендикуляров пар дополнительных конгруэнций пересекают соответствующие прямые этой пары в центрах.

Обратно, если у специальных пар $\widetilde{T}$ конгруэнций соответствующие прямые пары дополнительных конгруэнций пересекаются прямыми конгруэнции их общих перпендикуляров в центрах этих прямых, то по теореме 5 пары **T** конгруэнций являются равнонаклонными 1-го типа. Тогда $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_1' = \rho_2'$ и в системе уравнений (1) $t = 1$. Последние два уравнения системы имеют вид :

$$A = H + \Omega_{13} \frac{\rho_1 + \rho_1'}{h_1 - h_2}, \; A = H + \Omega_{23} \frac{\rho_1 + \rho_1'}{h_1 - h_2}.$$

Приравнивая правые части уравнений, получим, что $\rho_1 + \rho_1' = 0$. Значит, и $\rho_2 + \rho_2' = 0$. Таким образом, прямые конгруэнции общих перпендикуляров пересекают соответствующие прямые пары в их центрах.

Теорема 13. Если из трех нижеуказанных требований на специальные пары **Т** конгруэнций с равными произведениями абсцисс фокусов выполняется два требования, то имеет место третье :

а) фокальные расстояния соответствующих прямых пары конгруэнций равны между собой,

б) постоянно расстояние между соответствующими прямыми,

в) постоянен угол между соответствующими прямыми.

Доказательство. Специальные пары **Т** конгруэнций с равными произведениями абсцисс фокусов определяются системой уравнений (1), к которой надо присоединить $\rho_1\rho_2 = \rho_1'\rho_2'$. Тогда имеем систему уравнений :

$$Q_{a3} = -\Omega_{a3} \frac{\rho_1\rho_2}{h_1 - h_2}, \; A_a = H_a \frac{\rho_2}{\rho_1}, \; \rho_a' = -\rho_a. \tag{11}$$

Если выполнено условие а), то $\rho_1 - \rho_1' = 2\rho_1, \rho_2 - \rho_2' = 2\rho_2$. Так как равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых, то $\rho_1 = \rho_2$; если верно условие б), $h_1 - h_2 = \mathrm{const}$, т.е. $H_1 = H_2$, то $A_1 - A_2 = H\left(\rho_2^2 - \rho_1^2\right)\frac{1}{h_1 - h_2} = 0$ и, следовательно, постоянен угол между соответствующими прямыми , т.е. справедливо требование в).

Предположим, что выполнены условия а) и в). Тогда из а) следует, что $\rho_1 - \rho_1' = \rho_2 - \rho_2'$. Из системы уравнений (11) имеем, что $\rho_1 = \rho_2$. Значит $A_a = H_a$. Условие в) можно записать в виде $A_1 = A_2$. Тогда и $H_1 = H_2$ и, значит, постоянно расстояние между соответствующими прямыми.

Наконец, если выполнены условия б) и в), то к системе уравнений (11) надо присоединить $H_1 = H_2 \equiv H$, $A_1 = A_2 \equiv A$. Тогда имеем:

$$A_1 - A_2 = H\frac{\rho_2}{\rho_1} - H\frac{\rho_1}{\rho_2} = H\frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{\rho_1\rho_2}.$$

Так как $A_1 = A_2$, то $\rho_1 = \rho_2$ и, учитывая, что $\rho_1' = -\rho_1$, $\rho_2' = -\rho_2$, получим $\rho_1' = \rho_2'$. Тогда $\rho_1 - \rho_1' = 2\rho_1$, $\rho_2 - \rho_2' = 2\rho_2$ и, следовательно, равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых.

Заметим, что специальные пары $\widetilde{\mathrm{T}}$ конгруэнций с равными произведениями абсцисс фокусов есть пары **Т** конгруэнций, у которых равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых пары **Т** и пары дополнительных конгруэнций. В силу теоремы 7 прямые конгруэнции общих перпендикуляров пересекают соответствующие прямые в их центрах и таким же свойством обладают пары **Т** дополнительных конгруэнций. Рассматриваемые пары существуют с произволом одной функции одного аргумента.

Библиографический список

1. Редозубова О.С. Основы метрической теории пар **Т** конгруэнций // МГПИ им. В.И.Ленина. Деп. в ВИНИТИ, № 2993-80 Деп.

2. Фиников С.П. Теория конгруэнций. М.; Л., 1950.

3. Редозубова О.С. О симметричных парах **Т** конгруэнций // Геометрия погруженных многообразий. М., 1981.

4. Редозубова О.С. Пары **Т** конгруэнций, соответствующие прямые которых проходят через фокусы прямых конгруэнции общих перпендикуляров // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1992. Вып.23.

5. Редозубова О.С. Специальные пары **Т** конгруэнций, у которых равны между собой произведения абсцисс фокусов // Там же, Калининград, 1993. Вып.24.

O.S. R e d o z u b o v a

SPECIAL PAIRS OF T-CONGRUENCES

The article represents concepts of the metric theory of special pairs T of congruences. The author uses the results which were obtained by him earlier. Theree were established connections between the separate parts of scientific results that were received by him in different years.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ $(CL)_{1,2}$

Е.В. С к р ы д л о в а

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном проективном пространстве продолжается исследование вырожденных конгруэнций $(CL)_{1,2}$, порожденных кривой второго порядка C, описывающей однопараметрическое семейство, и прямой L, описывающей конгруэнцию. Каждой прямой L конгруэнции $(CL)_{1,2}$ ставится в соответствие единственная коника C, полным прообразом которой является однопараметрическое семейтсво $(L)_C$ прямых L. В работах [1], [2] рассмотрены конгруэнции $(CL)_{1,2}$, в которых прямая L не принадлежит плоскости соответствующей ей коники C. Поэтому настоящая работа, дополняющая предыдущие, посвящается изучению тех конгруэнций $(CL)_{1,2}$, в которых коника C и прямая L пересекаются в двух различных точках. Семейство $(L)_C$ в этих условиях является плоским торсом. Изу-