1965. № 5.

7. Розенфельд Б.А.Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969. 547 с.

УДК 514.75

СТРУКТУРЫ ТЕОРИИ ТОЧЕЧНЫХ СООТВЕТСТВИЙ В ГЕОМЕТРИИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

Б.А.Андреев

(Калининградский государственный университет)

В работе показано, что нормализованная гиперповерхность S расширенного аффинного пространства P_{n+1} порождает семейство точечных соответствий n-мерных аффинных пространств. Исследуется возникающая при этом связь основных понятий и образов теории точечных соответствий [1], [2]: локальной коллинеации Чеха, характеристических направлений, связности Г.Врэнчану с такими понятиями теории нормализованных гиперповерхностей, как направления Дарбу, канонический пучок соприкасающихся гиперквадрик, чебышевский вектор, внутренние связности I-го и 2-го рода.

§ I. Отображения, порожденные нормализованной гиперповерхностью

Рассмотрим $(n+1)$-мерное проективное пространство P_{n+1}, в котором зафиксирована гиперплоскость P_n. Отнесем пространство P_{n+1} к подвижному реперу $R=\{R_0, R_J\}$ $(J,\ldots=\overline{1,n+1})$; деривационные формулы репера R имеют вид

$$d\bar{R}_0=\tilde{\omega}_0^0\bar{R}_0+\tilde{\omega}_0^J\bar{R}_J, \quad d\bar{R}_J=\tilde{\omega}_J^0\bar{R}_0+\tilde{\omega}_J^K\bar{R}_K. \tag{I.1}$$

Формы Пфаффа $\tilde{\omega}_{\bar{J}}^{\bar{K}}$ $(\bar{J},\ldots=\overline{0,n+1})$ подчиняются уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\tilde{\omega}_{\bar{J}}^{\bar{K}}=\tilde{\omega}_{\bar{J}}^{\bar{T}}\wedge\tilde{\omega}_{\bar{T}}^{\bar{K}}. \tag{I.2}$$

Поместив на гиперплоскость P_n вершины R_J, имеем:

$$\tilde{\omega}_J^0\equiv 0. \tag{I.3}$$

Будем рассматривать пространство P_{n+1} как расширенное аффинное пространство; при этом в силу (I.2) формы Пфаффа

$$\omega^J=\tilde{\omega}_0^J, \quad \omega_J^K=\tilde{\omega}_J^K-\delta_J^K\,\tilde{\omega}_0^0 \tag{I.4}$$

подчиняются уравнениям структуры $(n+1)$-мерного аффинного пространства. Заметим, что из (1.2) и (1.3) вытекает

$$\mathcal{D}\omega_J^K=\omega_J^T\wedge\omega_T^K. \tag{I.5}$$

Это означает, что точки R_J образуют подвижный репер n-мерного проективного пространства P_n.

Рассмотрим в P_{n+1} гиперповерхность S. Совместив вершину R_0 репера R с текущей точкой P гиперповерхности, а точки R_i $(i,\ldots=\overline{1,n})$ поместив в касательную плоскость T_P к S в точке P, получим репер I-го порядка гиперповерхности S. Дифференциальное уравнение гиперповерхности в этом репере имеет вид:

$$\omega^{n+1}=0. \tag{I.6}$$

Продолжения уравнения (I.6) приводят к уравнениям:

$$\omega_i^{n+1}=\Lambda_{ij}\,\omega^j, \tag{I.7}$$

$$\nabla\Lambda_{ij}=-\Lambda_{ij}\,\omega_{n+1}^{n+1}+\Lambda_{ijk}\,\omega^k, \tag{I.8}$$

$$\nabla\Lambda_{ijk}=-\Lambda_{ijk}\,\omega_{n+1}^{n+1}+\Lambda_{(ij}\Lambda_{k)\ell}\,\omega_{n+k}^{\ell}+\Lambda_{ijk\ell}\,\omega^{\ell}. \tag{I.9}$$

Здесь ∇ - оператор, определенный в [3, с.29], скобки означают циклирование, а компоненты $\Lambda_{ij}, \Lambda_{ijk}, \Lambda_{ijk\ell}$ фундаментальных объектов симметричны относительно всех своих индексов.

Оснастим поверхность S полем нормалей 1-го рода, т.е. прямых N_P, трансверсальных поверхности в соответствующих точках P. Поместив на нормали N_P вершину R_{n+1} репера, получим уравнения прямой N_P в виде

$$x^i=0, \tag{I.10}$$

а систему дифференциальных уравнений поля нормалей в виде

$$\omega_{n+1}^{\ell}=\nu_i^{\ell}\,\omega^i. \tag{I.11}$$

Пусть Π_P - нормаль 2-го рода гиперповерхности S, которая является пересечением касательной в точке P к S гиперплоскости T_P с гиперплоскостью P_n.

Нормали Π_P являются элементами n-мерного проективного пространства P_n^*, двойственного к P_n. Формы Пфаффа ω_i^{n+1} являются структурными формами пространства P_n^*. В общем случае имеем:

$$\operatorname{rang}[\Lambda_{ij}]=n. \tag{I.12}$$

Таким образом, каждой точке $P\in S$ поставлен в соответствие единственный элемент $\Pi_P\in P_n^*$, а система (1.7) является системой дифференциальных уравнений отображения

3 Зак. 2036

$$f^S : P\in S \longmapsto \pi_P = f^S(P)\in P_n^* .$$

Из (I.I2) вытекает, что f^S является в общем случае локальным диффеоморфизмом многообразий S и P_n^*. Точки M_P, являющиеся пересечениями нормалей N_P с гиперплоскостью P_n, задают в P_n^* структуру нормализованного проективного пространства. Она определяет в P_n^* внутреннюю проективно-эвклидову связность [4, §62], которую мы обозначим γ. Это означает, что связность γ на P_n^* и внутренняя связность 2-го рода на нормализованной гиперповерхности S соответствуют друг другу при диффеоморфизме f^S [4, с.246].

Пусть $P_0\in S$ и

$$\varepsilon_{P_0} : P\in \mathcal{U}\subset T_{P_0} \longmapsto \varepsilon_{P_0}(P)\in S$$

проекция гиперплоскости T_{P_0} на S вдоль нормали N_{P_0} ; ε_{P_0} является диффеоморфизмом некоторой области $\mathcal{U}\subset T_{P_0}$, содержащей P_0 и $\varepsilon_{P_0}(\mathcal{U})$. При фиксации точки P_0 в пространстве P_n^* выделяется связка $\{M_{P_0}\}$ гиперплоскостей, и P_n^* можно рассматривать как расширенное аффинное пространство A_n. Рассмотрим отображение $f^S_{P_0} = f^S\circ\varepsilon_{P_0}$. Отображение $f^S_{P_0} : T_{P_0}\to A_n$ является локальным диффеоморфизмом n-мерных аффинных пространств. Таким образом, отображение $f^S_{P_0}$ является объектом изучения теории точечных соответствий [1], [2], структуры которой оказываются связанными с геометрией поверхности S. Рассмотрим некоторые фундаментальные понятия этой теории в контексте изучения поверхности S.

§ 2. Локальная коллинеация Чеха, чебышевский вектор и канонический пучок соприкасающихся гиперквадрик

Дробно-линейные отображения $K(P_i): T_{P_0}\to A_n$

$$\varepsilon_i = \frac{\Lambda_{ij}x^j}{1-P_k x^k}, \qquad (2.I)$$

касательные к отображению $f^S_{P_0}$ в точке P_0, мы будем, как и в теории точечных соответствий, называть коллинеациями, отвлекаясь от конкретной реализации A_n как аффинного пространства. В связке коллинеаций $K(P_i)$, касательных к точечному соответствию f, выделяется локальная коллинеация Чеха $K(P_i^0)$ [1], [5], которая характеризуется тем, что функция $\mathfrak{J}(f)/\mathfrak{J}(K(P_i^0))$, где $\mathfrak{J}(f)$ и $\mathfrak{J}(K(P_i^0))$ - якобианы указанных отображений, имеет в

P_0 стационарную точку. Аналитически в нашем случае локальная коллинеация Чеха определяется соотношениями:

$$P_i^0 = \frac{1}{n+1} V^{pq}\Lambda_{pqi}, \qquad (2.2)$$

где $\{V^{ij}\}$ - тензор, взаимный к $\{\Lambda_{ij}\}$. Отсюда вытекает, что нормаль 2-го рода гиперповерхности S

$$x^{n+1}=0,\quad V^{pq}\Lambda_{pqi}x^i-(n+1)=0 \qquad (2.3)$$

является прообразом несобственной гиперплоскости в A_n (в нашем случае прообразом связки $\{M_{P_0}\}$) при локальной коллинеации Чеха. Система величин $b_k = V^{ij}\Lambda_{ijk}$ охвачена фундаментальным объектом 3-го порядка гиперповерхности [6, с.36I] и названа Г.Ф.Лаптевым [6], следуя А.П.Нордену [4], чебышевским вектором. В нашем случае величины b_i составляют ковариантный вектор: $\nabla b_i = b_{ik}\omega^k$. Имея в виду (2.2), приходим к следующему утверждению.

Т е о р е м а 2.I. Локальная коллинеация Чеха отображения $f^S_{P_0}$ определяется чебышевским вектором $b_i = V^{pq}\Lambda_{pqi}$.

Рассмотрим канонический пучок [6, с.37I] соприкасающихся гиперквадрик поверхности S в точке P_0. Находя поляры всех точек нормали N_{P_0} относительно этих гиперквадрик, убеждаемся в совпадении пересечений всех этих поляр с гиперплоскостью T_{P_0} :

$$x^{n+1}=0,\quad b_i x^i-(n+2)=0. \qquad (2.4)$$

Т е о р е м а 2.2. Нормали второго рода (2.3) и (2.4), порожденные соответственно локальной коллинеацией Чеха и пучком соприкасающихся гиперквадрик, в общем случае параллельны друг другу и переводятся одна в другую гомотетией гиперплоскости T_{P_0} с центром в P_0 и коэффициентом $\varkappa = \frac{n+1}{n+2}$.

Т е о р е м а 2.3. Если локальная коллинеация Чеха отображения $f^S_{P_0}$ является линейным отображением, то поляры точек нормали N_{P_0} относительно элементов канонического пучка соприкасающихся гиперквадрик параллельны гиперплоскости T_{P_0}

Д о к а з а т е л ь с т в о. Линейность локальной коллинеации Чеха приводит к равенству

$$b_i = 0. \qquad (2.5)$$

Справедливость теоремы теперь вытекает из формулы (I60) работы [6].

§ 3. Характеристические направления

Для координатного представления отображения f^S из (I.7), (I.8) получаем

$$\xi_i = \Lambda_{ij} x^j + \frac{1}{2} \Lambda_{ijk} x^j x^k + <3>, \qquad (3.1)$$

где символ $<3>$ означает совокупность членов порядков малости $p \geqslant 3$ относительно аффинных координат точки $P \in S$, близкой к $P_0 = R_0$, а ξ_i – координаты подпространства $f^S(P)$, задаваемого системой

$$X^0 = 0, \quad \xi_i X^i - X^{n+1} = 0. \qquad (3.2)$$

Направление, определяемое вектором Λ^i в точке P_0, называется характеристическим направлением [1] отображения $f^S_{P_0}: T_{P_0} \to A_n$, если для кривой $\ell: \mathbb{R} \to T_{P_0}$, определяющей в P_0 это направление и имеющей P_0 своей инфлексионной точкой, кривая $f^S_{P_0} \circ \ell: \mathbb{R} \to A_n$ также имеет инфлексионную точку в $f^S_{P_0}(P_0) \in A_n$. Множество характеристических направлений в точке P_0 определяется системой

$$\Lambda_{ijk} \Lambda^j \Lambda^k = 2\lambda \Lambda_{ij} \Lambda^j. \qquad (3.3)$$

Т е о р е м а 3.1. В общем случае в каждой точке P_0 нормализованной гиперповерхности S отображением $f^S_{P_0}$ определяется $2^n - 1$ характеристических направлений, которые лежат в касательной гиперплоскости к поверхности.

Таким образом, в каждой точке двумерной поверхности в A_3 имеется 3 касательных к поверхности характеристических направления. Заметим, что, хотя они определяются тем же объектом $\Gamma_3 = \{\Lambda_{ij}, \Lambda_{ijk}\}$, что и направления Дарбу:

$$(4\Lambda_{ijk} - 3\Lambda_{ij} V^{pq} \Lambda_{pqk}) \Lambda^i \Lambda^j \Lambda^k = 0, \qquad (3.4)$$

последние в общем случае не совпадают с характеристическими направлениями. Рассмотрим случай, когда в точке $P_0 \in S \subset A_3$ любое направление является характеристическим. Тогда индикатриса $\mathfrak{I}$ [7] отображения $f^S_{P_0}$ должна содержать прямую $t: x^{n+1} = 0$, $t_k x^k - 1 = 0$, не инцидентную точке P_0, а для объекта Λ_{ijk} выполняется: $\Lambda_{ijk} = \Lambda_{i(j} t_{k)}$. Отображение $f^S_{P_0}$ в этом случае имеет касание 2-го порядка с касательной в P_0 коллинеацией K, причем прямая t является прообразом связки $\{M_{P_0}\}$ при отображении K. Рассмотрим нормаль 2-го рода τ поверхности S, которая получается из нормали t гомотетией плоскости T_{P_0} с центром P_0 и коэффициентом $\varkappa = \frac{3}{2}$. Уравнение, определяющее направления Дарбу, в рассматриваемом случае принимает вид

$$\Lambda_{ij} \Lambda^i \Lambda^j (2t_k - \frac{3}{4} b_k) \Lambda^k = 0,$$

которое приводит к следующему выводу.

Т е о р е м а 3.2. Если любое направление, касательное к двумерной поверхности S в точке P_0, является характеристическим направлением отображения $f^S_{P_0}$, то множество направлений Дарбу в P_0 характеризуется одним из следующих условий: I) множество направлений Дарбу состоит из асимптотических направлений поверхности S и направления, определяемого точкой пересечения нормалей 2-го рода τ и задаваемой чебышевским вектором нормали (2.4); 2) любое направление, касательное к S в точке P_0, является направлением Дарбу (случай совпадения нормалей (2.4) и τ).

§ 4. Связность Г.Врэнчану соответствия $f^S_{P_0}$

Связность Г.Врэнчану [1], [8], присоединенная к точечному соответствию, в случае соответствия $f^S_{P_0}: T_{P_0} \to A_n$ определяется объектом $\Gamma^i_{jk} = V^{i\ell} \Lambda_{\ell jk}$. Из (I.8), (I.9) получаем: $\nabla \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk\ell} \omega^\ell$. Так как объект Γ^i_{jk} определяет в T_{P_0} аффинную связность Γ_{P_0}, соответствующую при отображении $f^S_{P_0}$ существующей в A_n связности [1, § 5], которая определяется структурой аффинного пространства, то образами геодезических линий связности Γ_{P_0} $\ell: \mathbb{R} \to T_{P_0}$, проходящих через точку P_0, при отображении будут прямые в A_n, которые, как следует из § I, являются в то же время образами имеющих соответствующие направления в точке P_0 геодезических внутренней связности 2-го рода нормализованной гиперповерхности S при отображении f^S. Следовательно, справедлива

Т е о р е м а 4.I. Если $\ell: \mathbb{R} \to T_{P_0}$ – геодезическая связности Г.Врэнчану соответствия $f^S_{P_0}$, проходящая через точку P_0, то кривая $\varepsilon_{P_0} \circ \ell: \mathbb{R} \to S$ является геодезической внутренней связности 2-го рода нормализованной гиперповерхности S.

Пусть $t \in \mathbb{R}$, $\ell(0) = P_0$. Для ℓ и $\varepsilon_{P_0} \circ \ell$ имеем соответственно:

$$x^{n+1} = 0, \quad x^i = \Lambda^i t + \frac{1}{2} \Gamma^i_{jk} \Lambda^j \Lambda^k \cdot t^2 + <3>, \qquad (4.1)$$

$$x^{n+1} = \frac{1}{2} \Lambda_{ij} \Lambda^i \Lambda^j t^2 + <3>, \quad x^i = \Lambda^i t + \frac{1}{2} \Gamma^i_{jk} \Lambda^j \Lambda^k \cdot t^2 + <3>. \qquad (4.2)$$

Для геодезических внутренней связности I-го рода гиперповерхности S выполняется

$$x^i = \Lambda^i t + <3>, \quad x^{n+1} = \frac{1}{2} \Lambda_{ij} \Lambda^i \Lambda^j t^2 + <3> \qquad (4.3)$$

Легко показать, что система (3.3) равносильна следующей:

$$\Gamma^i_{jk} \Lambda^j \Lambda^k = 2\lambda \Lambda^i. \qquad (4.4)$$

Из (4.I) – (4.4) вытекают следующие утверждения.

Т е о р е м а 4.2. Чтобы вектор Λ^i, касательный к гиперповерхности S в точке P_o, определял характеристическое направление отображения $f^S_{P_o}$, необходимо и достаточно, чтобы геодезическая связности Г.Врэнчану, определяющая это направление в точке P_o, имела в ней инфлексионную точку.

Т е о р е м а 4.3. Чтобы вектор Λ^i, касательный к гиперповерхности S в точке P_o, определял характеристическое направление отображения $f^S_{P_o}$, необходимо и достаточно, чтобы геодезические внутренних связностей I-го и 2-го рода нормализованной гиперповерхности S, определяющие это направление, имели в точке P_o геометрическое касание 2-го порядка.

§ 5. Поверхность, оснащенная аффинными нормалями

Пусть нормали N_P являются аффинными нормалями [4, с.247] гиперповерхности S. Это означает взаимность нормалей N_P и $\pi_P = T_P \cap P_n$ соответственно I-го и 2-го рода гиперповерхности. Так как взаимность нормализации характеризуется тем [4, с.234], что определяемая ею пара внутренних геометрий является чебышевской: $\ell_i = 0$, то, учитывая (2.5), приходим к следующему утверждению.

Т е о р е м а 5.I. Нормали N_P гиперповерхности S являются аффинными нормалями в том и только в том случае, если локальная коллинеация Чеха соответствия f^S_P в каждой точке $P \in S$ является линейным отображением.

Следующее предложение вытекает из предыдущей теоремы и утверждения работы [4, с.248].

Т е о р е м а 5.2. Если локальная коллинеация Чеха соответствия f^S_P в каждой точке P гиперповерхности S является линейным отображением, то пара внутренних геометрий нормализованной поверхности S является эквиаффинной.

Библиографический список

I. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Геометрия, I963. Итоги науки / ВИНИТИ. М., I965. С. 65-I07.

2. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных

соответствий между пространствами // Алгебра, топология, геометрия, I970. Итоги науки / ВИНИТИ. М., I97I. С.153-174.

3. А н д р е е в Б.А. О дифференциальной геометрии соответствий между пространством пары (p,q) и точечным пространством // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I97I. Вып.2. С.28-37.

4. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, I976.

5. Ч е х Э. Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами. I // Чехосл. матем. ж. I952. V.2. № I. P.9I-I07.

6. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. моск. матем. о-ва. М., I953. Т.2. С.275-382.

7. А н д р е е в Б.А. К геометрии дифференцируемого отображения $f: P_m \to \hat{P}_n\ (m>n)$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I987. Вып.I8. С.5-9.

8. Vranceanu G. Sul tensore associato ad corrispondenza fra spazi proettivi // Boll. Unione mat. ital. 1957. V.12. №4. P. 489-506.

УДК 5I4.77

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО СТРОЕНИЯ ГЛОБАЛЬНО ПРАВИЛЬНЫХ СЕТЕЙ НА ПРОСТЕЙШИХ ПОЛНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

И.Б.Б а р с к и й

(Марийский педагогический институт)

Главным объектом изучения является глобальное поведение сетей на двумерных регулярных поверхностях отрицательной гауссовой кривизны в трехмерном евклидовом пространстве с топологической точки зрения. С аналитической точки зрения дело сводится к исследованию дифференциальных уравнений [4]. При этом характеристики изображаются на поверхности асимтотичес-