Построение величин $\Lambda^0$ и $\Lambda_n$ можно осуществить и с помощью второй пары нормальных квазитензоров $T_i$ и $T^i$.

Итак, построенные инвариантные точечный и тангенциальный реперы, присоединенные внутренним образом в окрестности третьего порядка образующего элемента гиперполосы $H_{n-2}$, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &M_0 = A_0, && \sigma^0 = \tau^0 + \Lambda_i\tau^i + \Lambda_{n-1}\tau^{n-1} + \Lambda_n\tau^n, \\ &M_i = A_i - A_i A_0, && \sigma^i = \tau^i - \Lambda^i\tau^n, \\ &M_{n-1} = A_{n-1} - \Lambda_{n-1}A_0, && \sigma^{n-1} = \tau^{n-1} - \Lambda^{n-1}\tau^n, \\ &M_n = A_n + \Lambda^{n-1}A_{n-1} + \Lambda^i A_i + \Lambda^0 A_0, && \sigma^n = \tau^n. \end{aligned} \tag{53}$$

## Список литературы


1. Василян М.А. Об инвариантном оснащении гиперполосы. ДАН Арм.ССР. Матем., 1970, т.50, №2, с.65-70.

2. Василян М.А. Квадратичные гиперполосы ранга $n-2$ в проективном пространстве $P_n$. ДАН Арм.ССР. Матем., 1970, т.50, №4, с.193-197.

3. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр.Моск.матем.об-ва, 1953, т.2, с.275-382.

4. Василян М.А. Проективная теория многомерных гиперполос. ДАН Арм.ССР. Матем., 1971, т.6, №6, с.477-481.

5. Столяров А.В. О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы. Изв.высш.учебн.заведений. Матем., 1975, №10, с.97-99.






И.А.Сауткина

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЛУКВАДРАТИЧНЫХ ПАР ФИГУР В $P_3$

В трехмерном проективном пространстве исследуются пары $V$, образованные конгруэнцией $(Q)$ квадрик $Q$ и поверхностью $(P)$, описанной точкой $P$, не инцидентной квадрике $Q$. В работе подробно рассмотрены пары $V_1$, выделенные из пар $V$ заданием двух прямых характеристического многообразия конгруэнции $(Q)$ ранга один [1].

## § 1. Система пфаффовых уравнений пары $V$

Канонический репер $R=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ пары $V$ строим следующим образом: вершину $A_4$ репера совмещаем с точкой $P$, вершину $A_3$ помещаем в характеристическую точку поляры $\mathcal{L}$ точки $A_4$ относительно квадрики $Q$, вершины $A_1$ и $A_2$ – в точки пересечения поляры точки $A_3$ относительно коники $C$, которая инцидентна квадрике $Q$ и поляре $\mathcal{L}$ точки $A_4$ относительно $Q$ с коникой $C$.

Относительно построенного репера уравнение квадрики $Q$ имеет вид:

$$(x^3)^2 + (x^4)^2 - 2x^1x^2 = 0. \tag{1}$$

Деривационные формулы репера $R$ запишутся в виде:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \quad \alpha,\beta,\gamma = 1,2,3,4,$$

где формы Пфаффа $\omega_\alpha^\beta$ удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta,$$

причем

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0.$$

Пусть плоскости $\mathcal{L}$ образуют двупараметрическое семейство и $\omega_1^4 \wedge \omega_2^4 \neq 0$ .Обозначим $\omega_i^4 = \omega_i$, $i,j,k = 1,2$. Система уравнений Пфаффа пары $V$ запишется в виде:

$$\omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k, \; \omega_3^4 = 0,$$

$$\omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^3 = \Gamma_3^{3k}\omega_k, \qquad (2)$$

$$\omega_4^4 = \Gamma_4^{4k}\omega_k, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 = a^k\omega_k,$$

причем по индексам $i$ и $j$ суммирование не производится, $i \neq j$ .Из системы (2) следует,что пары $V$ определяются с произволом II функций двух аргументов.

## § 2. Пары $V_1$

О п р е д е л е н и е. Пара $V$ называется парой $V_1$ если выполнены следующие условия: I) прямые $A_1A_2$ и $A_3A_4$ являются компонентами характеристического многообразия ранга один, 2) существует расслоение от прямолинейной конгруэнции $(A_1A_2)$ к прямолинейной конгруэнции $(A_3A_4)$ , 3)касательные к линиям $\omega_j = 0$ на поверхностях $(A_i)$ пересекаются в точке $(A_4)$.

Существуют три класса пар $V_1$: пары $V_1^1$ и пары $V_1^2$ определяемые с произволом двух функций одного аргумента, и пары $V_1^0$ , определяемые следующей вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа:

$$\omega_i^j = \omega_3^4 = \omega_4^3 = \omega_i^i = \omega_3^3 = \omega_4^4 = 0, \quad \omega_i^3 = a\omega_j,$$

$$\omega_3^i = \gamma\omega_j, \quad \omega_4^i = a\gamma\omega_i, \quad d\gamma = da = 0. \qquad (3)$$

Пары $V_1^0$ обладают следующими геометрическими свойствами: I/ точки $A_3$ и $A_4$ являются характеристическими точками соответственно граней $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$; 2/фокусы $\mathcal{F}_i$ и $\Phi_i$ лучей $A_1A_2$ и $A_3A_4$ прямолинейных конгруэнций $(A_1A_2)$ и $(A_3A_4)$ гармонически делят точки $A_1$ и $A_2$ , $A_3$ и $A_4$ ;3/асимптотические линии на поверхностях $(A_i)$, $(A_3)$, $(A_4)$ соответствуют .



Т е о р е м а. Коника $C$ имеет шесть фокусов: точки $A_i$ и точки пересечения с коникой $C$ прямых $\mathcal{F}_iA_3$.

Доказательство теоремы следует из анализа системы уравнений $x^1x^2(x^1-x^2)(x^1+x^2) = 0$, $(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0$, $x^4 = 0$, определяющей фокальные точки коники $C$ .

Т е о р е м а.Характеристическое многообразие конгруэнций квадрик $Q$ состоит из четырех прямых линий.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Характеристическое многообразие квадрик $Q$ определяется системой уравнений

$$\begin{cases}(x^1+x^2)\big((\gamma-a)x^3 + (a\gamma-1)x^4\big) = 0,\\ (x^1-x^2)\big((\gamma+a)x^3 - (a\gamma+1)x^4\big) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^3 = 0,\\ x^4 = 0\end{cases} \vee \begin{cases}x^1 = 0,\\ x^2 = 0\end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases}x^1+x^2 = 0,\\ (\gamma+a)x^3 - (a\gamma+1)x^4 = 0\end{cases} \vee \begin{cases}x^1 - x^2 = 0\\ (\gamma-a)x^3 + (a\gamma-1)x^4 = 0\end{cases}$$

Восемь фокальных точек квадрики $Q$ находятся как точки пересечения квадрики $Q$ с прямыми характеристического многообразия.

Т е о р е м а.Каждая из поверхностей $(A_i)$, $(A_3)$, $(A_4)$ является одной и той же невырожденной инвариантной квадрикой.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Точки $A_i$, $A_3$, $A_4$ лежат на квадрике

$$x^1x^2 - \gamma x^3x^4 = 0. \qquad (4)$$

Дифференцируя уравнение (4),убеждаемся,что (4)-инвариантная квадрика.

### Список литературы

I.М а л а х о в с к и й В.С.,М а х о р к и н В.В.. Дифференциальная геометрия многообразий квадрик в n-мерном проективном пространстве.-Труды геом.семинара. ВИНИТИ АН СССР,1974,6,с.II3-I33.