убеждаемся, что квадрика (4.6) инвариантна.

Из уравнения квадрики Ли видно, что точки A_3, A_4 лежат на этой квадрике, точки A_1 и A_2, A_i и A_4, A_i и A_3 сопряжены относительно квадрики. В сечении квадрики Ли (4.6) плоскостями $x^1=0$ и $x^2=0$ получаются коники C_1 и C_2, уравнения которых, соответственно, имеют вид

$$(x^2)^2 - 2b x^3 x^4 = 0, \quad x^1 = 0, \qquad (4.7)$$

$$(x^1)^2 - 2b x^3 x^4 = 0, \quad x^2 = 0. \qquad (4.8)$$

Список литературы

1. Свешникова Г.Л. Конгруэнции кривых второго порядка с двумя вырождающимися фокальными поверхностями. – В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. I Калининград, 1970, с. 71–78

2. Малаховский В.С. К геометрии касательно оснащенных многообразий. – "Известия вузов. Сер. Математика", 1972, №9(124), с. 54–65.

3. Малаховский В.С. Касательно оснащенные конгруэнции коник. – В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 4. Калининград, 1974, с. 68–86.

4. Фиников С.П., Теория пар конгруэнций. М., ГИТТЛ, 1956, 457 с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
1975 Вып. 6

Е.В. Скрыдлова

О ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ ПАР КОНИК

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматриваются вырожденные конгруэнции $(C_1C_2)_{2,1}$ пар коник C_1 и C_2 [1]. I. Каждой конике C_1 конгруэнции (C_1) соответствует единственная коника C_2 однопараметрического семейства (C_2), полным прообразом которой является однопараметрическое семейство $(C_1)_{C_2}$ коник C_1. Найдены условия принадлежности всех коник C_1 семейства $(C_1)_{C_2}$ и всех коник C_2 семейства (C_2) стационарным квадрикам. Исследованы частные классы вырожденных конгруэнций $(C_1C_2)_{2,1}$, в которых все коники C_1 и C_2 принадлежат одной стационарной квадрике Q. Невырожденные конгруэнции пар коник рассматривались В.С. Малаховским [2].

§I. Репер вырожденной конгруэнции $(C_1C_2)_{2,1}$

Отнесем пространство P_3 к реперу $R=\{A_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4)$ деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta. \qquad (1.1)$$

Формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \qquad (1.2)$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0 \quad (1.3)$$

Пусть ℓ – линия пересечения плоскостей коник C_1 и C_2 и вершина A_i (здесь и далее $i,j,k=1,2;\ i\neq j$, по индексам i,j не суммировать) репера R – одна из точек пересечения коники C_j с прямой ℓ. Вершины A_{i+2} являются полюсами прямой ℓ относительно коники C_i соответственно. Уравнения коник C_1 и C_2 и система уравнений Пфаффа вырожденной конгруэнции $(C_1C_2)_{2,1}$ относительно репера R записываются соответственно в виде

$$(x^3)^2-(a_1x^1)^2-2x^1x^2=0,\ x^4=0; \quad (1.4)$$

$$(x^4)^2-(a_2x^2)^2-2x^1x^2=0,\ x^3=0; \quad (1.5)$$

$$\begin{gathered}\omega_1^2=\Gamma_1^2\omega_4^3,\quad \omega_2^1=\Gamma_2^{1k}\omega_k,\quad \omega_i^3=\Gamma_i^3\omega_4^3,\\ \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,\quad \omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k,\quad \omega_4^1=\Gamma_4^1\omega_4^3-(a_2)^2\omega_4^2+\omega_2,\\ \omega_4^2=\Gamma_4^2\omega_4^3+\omega_1,\quad \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k,\quad \Omega_1=a^k\omega_k,\\ \Omega_2=f\omega_4^3,\quad \Theta_1=A^k\omega_k,\quad a_2\Theta_2-\omega_2^1=A_2\omega_4^3,\end{gathered} \quad (1.6)$$

где

$$\Omega_i=-\omega_i^i-\omega_j^j+2\,\omega_{i+2}^{i+2}, \quad (1.7)$$

$$\Theta_i=da_i-a_i\,(\omega_i^i-\omega_{i+2}^{i+2}) \quad (1.8)$$

и формы

$$\omega_i^4=\omega_i \quad (1.9)$$

приняты в качестве базисных.

Предполагается, что

$$\omega_4^3\neq 0, \quad (1.10)$$

тем самым из рассмотрения исключается случай, когда поверхность (A_4) является огибающей однопараметрического семейства плоскостей коник C_2. Анализируя систему уравнений (1.6), убеждаемся, что вырожденная конгруэнция $(C_1C_2)_{2,1}$ существует и определяется с произволом семи функций двух аргументов.

§ 2. Условия принадлежности всех коник C_1 семейства $(C_1)_{C_2}$ некоторой квадрике

Поставим задачу – найти условия, при которых все коники C_1 однопараметрического семейства $(C_1)_{C_2}$ принадлежат некоторой квадрике Q. Уравнение такой квадрики в общем случае может быть записано в виде

$$Q=(x^3)^2-(a_1x^1)^2-2x^1x^2+2a_{k4}x^kx^4+2a_{34}x^3x^4+a_{44}(x^4)^2=0. \quad (2.1)$$

Условие стационарности квадрики Q для семейства $(C_1)_{C_2}$ коник C_1

$$dQ-2\left(\Theta-\omega_3^3-a_{34}\,\omega_3^4\right)Q\equiv 0 \quad (mod\ \omega_4^3) \quad (2.2)$$

может быть получено дифференцированием уравнения (2.1) с помощью уравнений стационарности точки

$$dx^\alpha=-x^\beta\omega_\beta^\alpha+x^\alpha\,\Theta,\quad (\mathcal{D}\Theta=0). \quad (2.3)$$

При этом на коэффициенты системы уравнений (1.6) и на функции a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44} накладываются следующие связи:

$$\Gamma^{31}_4\left[(a_1)^2\Gamma^{12}_3+\Gamma^{22}_3-a_{14}\Gamma^{42}_3\right]-\Gamma^{32}_4\left[(a_1)^2\Gamma^{11}_3+\Gamma^{21}_3-a_{14}\Gamma^{41}_3-a_{34}\right]=0,$$

$$\Gamma^{31}_4\left(\Gamma^{12}_2-a_{24}\right)-\Gamma^{32}_4\Gamma^{11}_2=0,$$

$$\Gamma^{31}_4\left(\Gamma^{12}_3-a_{24}\Gamma^{42}_3-a_{34}\right)-\Gamma^{32}_4\left(\Gamma^{11}_3-a_{24}\Gamma^{41}_3\right)=0, \qquad (2.4)$$

$$\Gamma^{31}_4\left[a_1A^2+(a_1)^2a_{34}\Gamma^{42}_3\right]-\Gamma^{32}_4\left[a_1A^1+a_{14}+(a_1)^2a_{34}\Gamma^{41}_3\right]=0,$$

$$\Gamma^{31}_4\left[(a_1)^2\Gamma^{12}_2-a^2-2a_{34}\Gamma^{42}_3-a_{14}\right]-\Gamma^{32}_4\left[(a_1)^2\Gamma^{11}_2-a^1-\right.$$
$$\left.-2a_{34}\Gamma^{41}_3-a_{24}\right]=0,$$

$$d\,a_{i4}+a_{i4}\left(2\omega^3_3-\omega^4_4-\omega^i_i\right)+\delta^1_i(a_1)^2\omega^1_4+\omega^j_4-a_{j4}\,\omega^j_i-$$
$$-a_{44}\,\omega_i+2\,a_{i4}\,a_{34}\,\omega^4_3=A_{i4}\,\omega^3_4, \qquad (2.5)$$

$$d\,a_{34}+a_{34}\left(\omega^3_3-\omega^4_4\right)-a_{k4}\,\omega^k_3-a_{44}\,\omega^4_3+2(a_{34})^2\omega^4_3=A_{34}\,\omega^3_4,$$

$$\tfrac{1}{2}\,d\,a_{44}+a_{44}\left(\omega^3_3-\omega^4_4\right)-a_{k4}\,\omega^k_4+a_{34}\,a_{44}\,\omega^4_3=A_{44}\,\omega^3_4.$$

Таким образом, система уравнений Пфаффа вырожденной конгруэнции $(C_1C_2)_{2,1}$, у которой все коники C_1 семейства $(C_1)_{C_2}$ принадлежат стационарной квадрике, состоит из уравнений (1.6) и (2.5), причем выполняются конечные соотношения (2.4). Анализируя эту систему уравнений, находим произвол существования вырожденной конгруэнции $(C_1C_2)_{2,1}$ рассматриваемого типа – две функции двух аргументов.

§ 3. Условия принадлежности всех коник C_2 семейства (C_2) инвариантной квадрике

Уравнение квадрики Q, содержащей все коники C_2 однопараметрического семейства (C_2), в общем случае записывается в виде

$$Q=(x^4)^2-(a_2x^2)^2-2x^1x^2+2b_{k3}\,x^kx^3+b_{33}(x^3)^2+2b_{34}\,x^3x^4=0. \qquad (3.1)$$

Условие инвариантности квадрики Q

$$dQ=2\left(\Theta-\omega^4_4-b_{34}\,\omega^3_4\right)Q \qquad (3.2)$$

получено дифференцированием уравнения (3.1) с помощью уравнений стационарности точки (2.3). Оно приводит к следующим соотношениям:

$$\Gamma^2_1-b_{13}\Gamma^3_1=0,$$

$$(a_2)^2\Gamma^2_1-\phi-b_{13}\Gamma^3_2-b_{23}\Gamma^3_1-2b_{34}=0,$$

$$A_2+b_{23}\Gamma^3_2+(a_2)^2b_{34}=0,$$

$$\Gamma^2_4-b_{13}-b_{34}\Gamma^3_1=0, \qquad (3.3)$$

$$\Gamma^1_4-b_{23}-b_{34}\Gamma^3_2=0,$$

$$d\,b_{i3}+b_{i3}\left(2\omega^4_4-\omega^3_3-\omega^i_i\right)+\omega^j_3+\delta^2_i(a_2)^2\omega^i_3-$$
$$-b_{j3}\,\omega^j_i\quad b_{33}\,\omega^3_i-b_{34}\,\omega_i+2\,b_{i3}\,b_{34}\,\omega^3_4=0,$$

$$\frac{1}{2}\, d b_{33} + b_{33}\,(\omega_4^4 - \omega_3^3) - b_{k3}\,\omega_3^k - b_{34}\,\omega_3^4 + b_{33} b_{34}\,\omega_4^3 = 0\,, \quad (3.4)$$

$$d b_{34} + b_{34}\,(\omega_4^4 - \omega_3^3) - \omega_3^4 - b_{\alpha 3}\,\omega_4^\alpha + 2\,(b_{34})^2\,\omega_4^3 = 0\,.$$

Система уравнений Пфаффа вырожденной конгруэнции $(C_1 C_2)_{2,1}$, у которой все коники C_2 семейства (C_2) принадлежат инвариантной квадрике Q ,состоит из уравнений (1.6),(3.4), причем справедливы конечные соотношения (3.3).Дифференцируя уравнения (3.4) внешним образом,убеждаемся,что их замыкания удовлетворяются тождественно.Учитывая связи (3.3) в системе (1.6),получим следующие уравнения:

$$\omega_1^2 = b_{13}\,\omega_1^3\,,$$

$$\Omega_2 = (a_2)^2\omega_1^2 - b_{13}\,\omega_2^3 - b_{23}\,\omega_1^3 - 2\,b_{34}\,\omega_4^3\,,$$

$$a_2\,\Theta_2 - \omega_2^1 + b_{23}\,\omega_2^3 + (a_2)^2\, b_{34}\,\omega_4^3 = 0\,, \quad (3.5)$$

$$\omega_4^2 = b_{13}\,\omega_4^3 + b_{34}\,\omega_1^3 + \omega_1\,,$$

$$\omega_4^1 = b_{23}\,\omega_4^3 + b_{34}\,\omega_2^3 - (a_2)^2\,\omega_4^2 + \omega_2\,,$$

замыкания которых также удовлетворяются тождественно.Анализируя систему уравнений (1.6),(3.4),(3.5),находим произвол существования вырожденной конгруэнции $(C_1 C_2)_{2,1}$ рассматриваемого типа – семь функций двух аргументов.

§ 4. Вырожденная конгруэнция $(C_1 C_2)_{2,1}^{Q}$

О п р е д е л е н и е 1. Вырожденной конгруэнцией $(C_1 C_2)_{2,1}^{Q}$ называется вырожденная конгруэнция $(C_1 C_2)_{2,1}$, для которой: 1/все коники C_1 семейства $(C_1)_{C_2}$ и все коники C_2 семейства (C_2) принадлежат одной и той же инвариантной квадрике Q ;2/прямая $A_3 A_4$ касается квадрики Q.

З а м е ч а н и е.Для вырожденной конгруэнции $(C_1 C_2)_{2,1}^{Q}$ квадрике Q будут принадлежать все коники C_1 конгруэнции (C_1) ,что следует из инвариантности квадрики Q.

Т е о р е м а 1. Вырожденная конгруэнция $(C_1 C_2)_{2,1}^{Q}$ существует и определяется с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Согласно определению 1 для вырожденной конгруэнции $(C_1 C_2)_{2,1}^{Q}$ уравнения квадрик (2.1) и (3.1) должны совпадать,т.е.

$$a_1 = a_2 = 0\,, \quad (4.1)$$

$$b_{13} = b_{23} = 0\,, \quad a_{14} = a_{24} = 0\,, \quad (4.2)$$

$$b_{33} = a_{44} = 1\,, \quad a_{34} = b_{34} = g\,. \quad (4.3)$$

Уравнения коник C_1 и C_2 и квадрики Q в этом случае записываются в виде

$$(x^3)^2 - 2\,x^1 x^2 = 0\,, \quad x^4 = 0\,; \quad (4.4)$$

$$(x^4)^2 - 2\,x^1 x^2 = 0\,, \quad x^3 = 0\,; \quad (4.5)$$

$$Q = (x^3)^2 + (x^4)^2 - 2\,x^1 x^2 + 2g\,x^3 x^4 = 0\,. \quad (4.6)$$

Учитывая равенства (4.1) и (4.3) в соотношениях (2.4), (2.5),(3.4),(3.5),получим

$$\omega_i^j = 0\,, \qquad (4.7)$$

$$\omega_4^i = g\,\omega_j^3 + \omega_j\,, \qquad (4.8)$$

$$\omega_3^i = \omega_j^3 + g\,\omega_j\,, \qquad (4.9)$$

$$\Omega_1 = -2g\,\omega_3^4\,, \qquad \Omega_2 = -2g\,\omega_4^3\,, \qquad (4.10)$$

$$dg + (g^2-1)(\omega_3^4 + \omega_4^3) = 0\,. \qquad (4.11)$$

Замыкание уравнений (4.7)-(4.11) никаких следствий не дает. Требование касания прямой A_3A_4 с квадрикой Q эквивалентно равенству

$$g^2 - 1 = 0\,. \qquad (4.12)$$

Точкой касания в этом случае является точка $K = gA_3 - A_4$.

Таким образом, пфаффова система уравнений вырожденной конгруэнции $(C_1C_2)^Q_{2,1}$ состоит из уравнений (4.7)-(4.10) и следующих:

$$\omega_i^3 = \Gamma_i^3\,\omega_4^3\,, \quad \omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\,\omega_k\,, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\,\omega_k\,, \qquad (4.13)$$

где g определяется соотношением (4.12).

Анализируя систему (4.7)-(4.10),(4.13), находим

$$S_1 = 4\,, \quad q = 6\,, \quad S_2 = 2\,, \quad Q = N = 8$$

и убеждаемся в справедливости теоремы.

Т е о р е м а 2. Вырожденная конгруэнция $(C_1C_2)^Q_{2,1}$ обладает следующими свойствами: 1/ коники C_1 и C_2 пересекаются в точках A_1 и A_2; 2/ прямые A_1A_2 и A_3A_4 полярно сопряжены относительно квадрики Q; 3/ грани $(A_iA_3A_4)$ описывают однопараметрические семейства, их характеристики совпадают с прямолинейными образующими квадрики Q; 4/ одно из семейств торсов прямолинейной конгруэнции (A_iA_4) соответствует координатной линии $\omega_i=0$, прямолинейные конгруэнции (A_iA_3), (A_iA_4) имеют по одному семейству соответствующих торсов; 5/ прямолинейная конгруэнция (A_3A_4) представляет собой связку прямых с центром в точке K; 6/ конгруэнция (C_1) коник C_1 расслояема к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Справедливость первого утверждения теоремы следует из уравнений (4.4),(4.5) коник C_1 и C_2 соответственно. 2/ Прямая A_1A_2 пересекает квадрику Q в точках A_1 и A_2, причем касательные плоскости к квадрике Q в точках A_i пересекаются по прямой A_3A_4. Следовательно, прямые A_1A_2 и A_3A_4 полярно сопряжены относительно Q. Заметим, что образ, полярно соответствующий прямой A_3A_4 относительно квадрики Q, не исчерпывается прямой A_1A_2. Так как прямая A_3A_4 касается квадрики Q в точке K, то ей полярно соответствует вся плоскость (A_1A_2K). 3/ Имеем

$$d(A_iA_3A_4) = -\omega_j^j(A_iA_3A_4) - \omega_3^j(A_iA_jK),$$

т. е. грань $(A_iA_3A_4)$ описывает однопараметрическое семейство. Характеристика этого семейства совпадает с прямой A_iK, которая целиком принадлежит квадрике Q и, следовательно, является ее прямолинейной образующей; 4/Торсы прямолинейных конгруэнций (A_iA_3), (A_iA_4) записываются соответственно в виде:

$$\omega_i \omega_3^j = 0,$$

$$\omega_4^3 \omega_4^j = 0.$$

Так как

$$\omega_4^i = g\,\omega_3^i,$$

то утверждение теоремы справедливо.

5/Имеем

$$dK = (\omega_4^4 - g\,\omega_3^4)K,$$

следовательно, прямолинейная конгруэнция (A_3A_4) является связкой и K - ее центр. 6/Условия расслоения от конгруэнции (C_1) коник C_1 к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) имеют вид:

$$\omega_3^1 \wedge \omega_2^1 = 0,$$

$$\omega_2^3 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_4^1 = 0,$$

$$\omega_3^1 \wedge \Omega_1 + \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 - 2\,\omega_3^4 \wedge \omega_4^1 = 0,$$

$$2\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0,$$

$$\omega_3^2 \wedge \Omega_1 + \omega_3^1 \wedge \omega_1^2 - 2\,\omega_3^4 \wedge \omega_4^2 + a_1\Theta_1 \wedge \omega_3^1 +$$

$$+ (a_1)^2(\omega_3^4 \wedge \omega_4^1 - \omega_3^2 \wedge \omega_2^1) = 0,$$

$$(a_1)^2\omega_3^2 \wedge \omega_3^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 + \omega_1 \wedge \omega_4^2 = 0,$$

$$\omega_3^2 \wedge \omega_1^2 + a_1\Theta_1 \wedge \omega_3^2 + (a_1)^2\omega_3^4 \wedge \omega_4^2 = 0.$$

В силу системы уравнений (4.1), (4.7)-(4.10), (4.13) они тождественно удовлетворяются, что и доказывает утверждение теоремы.

§5. Характеристическая конгруэнция $(C_1C_2)^Q_{2,1}$

Определение 2. Характеристической конгруэнцией $(C_1C_2)^Q_{2,1}$ называется вырожденная конгруэнция $(C_1C_2)^Q_{2,1}$, для которой: 1/ A_3 - является характеристической точкой плоскости коники C_1; 2/характеристика плоскости коники C_2 проходит через точку A_1.

Для характеристической конгруэнции $(C_1C_2)^Q_{2,1}$ будут выполняться равенства

$$\omega_3^4 = 0, \tag{5.1}$$

$$\omega_1^3 = 0. \tag{5.2}$$

Замыкая уравнение (5.2), получим

$$\omega_4^3 = \Gamma_4^3\,\omega_1. \tag{5.3}$$

Пфаффова система уравнений характеристической конгруэнции $(C_1C_2)^Q_{2,1}$ с учетом равенств (5.1)-(5.3) записывается в виде

$$\begin{gathered}\omega_i^j = 0,\ \omega_1^3 = 0,\ \omega_2^3 = \Gamma_2^3\,\omega_4^3,\ \omega_3^1 = g\,\omega_2 + \omega_2^3,\\ \omega_3^2 = g\,\omega_1,\ \omega_3^4 = 0,\ \omega_4^1 = g\,\omega_3^1,\ \omega_4^2 = \omega_1,\\ \omega_4^3 = \Gamma_4^3\,\omega_1,\ \Omega_1 = 0,\ \Omega_2 = -2g\,\omega_4^3,\end{gathered} \tag{5.4}$$

где q определяется соотношением (4.12). Анализируя систему (5.4), находим произвол существования характеристической конгруэнции $(C_1C_2)^Q_{2,1}$ – две функции одного аргумента.

Теорема 3. Характеристическая конгруэнция $(C_1C_2)^Q_{2,1}$ обладает следующими геометрическими свойствами: 1/поверхность (A_1) вырождается в линию, поверхность (A_4) является торсом; 2/координатная линия $\omega_1 = 0$ – асимптотическая на поверхности (A_3), поверхность (A_3) является линейчатой; 3/прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) – параболическая, A_1 – сдвоенный фокус ее луча; 4/пара прямолинейных конгруэнций (A_1A_2),(A_3A_4) расслояема в направлении от (A_3A_4) к (A_1A_2).

Доказательство. 1/Имеем

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_1 A_4,$$

т. е. (A_1) – линия. Так как прямая A_1A_4 является касательной к линии (A_1), то семейство (A_1A_4) и, следовательно, поверхность (A_4) являются торсом. 2/Асимптотические линии поверхности (A_3) определяются уравнением

$$\omega_1 (\omega_2^3 + 2q\,\omega_2) = 0 .$$

Так как

$$dA_3 \Big|_{\omega_1=0} = \omega_3^1 A_1 + \omega_3^3 A_3$$

и

$$d(A_1A_3)\Big|_{\omega_1=0} = (\omega_1^1 + \omega_3^3)(A_1A_3),$$

то линия $\omega_1 = 0$ на поверхности (A_3) является прямой, а поверхность (A_3) – линейчатой. 3/Фокусы $sA_1 + tA_2$ луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) определяются уравнением

$$t^2 = 0,$$

т. е. A_1 – сдвоенный фокус, что и требовалось доказать. 4/Условия расслоения от прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2)

$$\omega_4^\kappa \wedge \omega_\kappa^3 = 0, \qquad \omega_3^\kappa \wedge \omega_\kappa = 0,$$

$$\omega_3^\kappa \wedge \omega_\kappa^3 - \omega_4^\kappa \wedge \omega_\kappa = 0$$

в силу системы (5.4) удовлетворяются тождественно, откуда и следует утверждение теоремы.

Список литературы

1. Малаховский В. С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.– В кн. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, с.41–49.

2. Малаховский В. С. Расслояемые пары конгруэнций фигур.–"Труды Геометрического семинара", 1971, Т.3, с. 193–220 (М., ВИНИТИ АН СССР).