ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.7

1976

М.В.Бразевич

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НОРМАЛИЗАЦИИ МНОГООБРАЗИЯ ГРАССМАНА

Как следует из работы автора [3], с произволом в одну функцию двух аргументов мы можем нормализовать конгруэнцию прямых так, что все одномерные подмногообразия нормализованной конгруэнции будут инволютивными парами линейчатых поверхностей. (Под инволютивными парами линейчатых поверхностей понимаются пары, у которых основные проективитеты на лучах [4] являются инволютивными.)

Естественно поставить задачу нормализовать подобным образом комплекс прямых и все многообразие Грассмана G_r (1,3). В данной заметке доказывается, что подобную нормализацию для всего многообразия Грассмана провести нельзя.

§1. Общие вопросы

Пусть трехмерное проективное пространство P_3 отнесено к подвижному реперу $\{A_{\mathcal{I}}\}$ ($\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \ldots = 1,2,3,4$), состоящему из четырех аналитических точек A_1, A_2, A_3, A_4. Инфинитезимальное перемещение такого репера определяется уравнениями

$$dA_{\mathcal{I}} = \omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{J}} A_{\mathcal{J}}. \tag{1.1}$$

Компоненты инфинитезимального перемещения репера $\{A_{\mathcal{I}}\}$, т.е. 1-формы $\omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{J}}$ являются инвариантными 1-формами проективной группы $PG(3, R)$, структурные уравнения которой имеют вид:

$$\mathcal{D}\omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{J}} = \omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{K}} \wedge \omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}}. \tag{1.2}$$

Пусть прямая $\ell = (A_1, A_2)$ описывает многообразие Грассмана Gr (1,3). Многообразие Грассмана назовем нормализованным, если на нем определено поле дифференциально-геометрического объекта

$$\nabla h_\alpha^p + \omega_\alpha^p = h_{\alpha\beta}^{pq}\,\omega_q^\beta, \qquad (p, q, \ldots = 1,2;\ \alpha, \beta, \ldots = 3,4). \tag{1.3}$$

Оснащающий объект h_α^p устанавливает дифференцируемое соответствие между прямыми пространства P_3, т.е. $\forall \ell = (A_1, A_2) \in Gr(1,3)$ ставит в соответствие прямую ℓ^*, определенную в подвижном репере $\{A_{\mathcal{I}}\}$ уравнениями

$$x^p = h_\alpha^p x^\alpha \tag{1.4}$$

Продолжая систему дифференциальных уравнений (1.3), т.е. дифференцируя ее внешним образом и раскрывая по лемме Картана, будем иметь

$$\nabla h_{\alpha\beta}^{pq} + h_\alpha^q\,\omega_\beta^p + h_\beta^p\,\omega_\alpha^q = h_{\alpha\beta\gamma}^{pqt}\,\omega_t^\gamma, \tag{1.5}$$

$$\nabla h_{\alpha\beta\gamma}^{pqt} + h_{\alpha\gamma}^{qt}\,\omega_\beta^p + h_{\beta\gamma}^{pt}\,\omega_\alpha^q + h_{\alpha\beta}^{tq}\,\omega_\gamma^p + h_{\alpha\beta}^{pt}\,\omega_\gamma^q + h_{\gamma\beta}^{pq}\,\omega_\alpha^t + h_{\alpha\gamma}^{pq}\,\omega_\beta^t = h_{\alpha\beta\gamma\sigma}^{pqts}\,\omega_s^\sigma, \tag{1.6}$$

где величины $h^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}$ и $h^{pqts}_{\alpha\beta\gamma\sigma}$ – симметричны сразу по парам индексов, начиная со второй пары, т.е.

$$h^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}=h^{ptq}_{\alpha\gamma\beta}, \quad h^{pqts}_{\alpha\beta\gamma\sigma}=h^{ptqs}_{\alpha\gamma\beta\sigma}=h^{pqst}_{\alpha\beta\sigma\gamma}. \qquad (1.7)$$

В соответствии с общими положениями теоретико-группового метода дифференциально-геометрических исследований (метода Г.Ф.Лаптева [5] - [6]), система величин $\{h^p_\alpha, h^{pq}_{\alpha\beta}\}$ образует первый фундаментальный дифференциально-геометрический объект нормализованного многообразия Грассмана, а величины $\{h^p_\alpha, h^{pq}_{\alpha\beta}, h^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}\}$ – второй фундаментальный дифференциально-геометрический объект рассматриваемого многообразия.

Дальнейшие продолжения системы (1.3) приводят к бесконечной последовательности фундаментальных полей оснащающего объекта:

$$H^{(1)}\{h^p_\alpha, h^{pq}_{\alpha\beta}\}\subset H^{(2)}\{h^p_\alpha, h^{pq}_{\alpha\beta}, h^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}\}\subset\dots$$

$$\dots\subset H^{(\nu)}\{h^p_\alpha, h^{p_1p_2}_{\alpha_1\alpha_2},\dots, h^{p_1p_2\dots p_{\nu+1}}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{\nu+1}}\}\subset\dots \qquad (1.8)$$

Вместо последовательности (1.8) введем алгебраически ей подобную последовательность:

$$\widetilde{H}^{(1)}\{h^p_\alpha, H^{pq}_{\alpha\beta}\}\subset\widetilde{H}^{(2)}\{h^p_\alpha, H^{pq}_{\alpha\beta}, \nabla^t_\gamma H^{pq}_{\alpha\beta}\}\subset\dots$$

$$\dots\subset\widetilde{H}^{(\nu)}\{h^p_\alpha, H^{pq}_{\alpha\beta}, \nabla^{t_1}_{\gamma_1}H^{pq}_{\alpha\beta},\dots,\nabla^{t_{\nu-1}}_{\gamma_{\nu-1}}\dots\nabla^{t_1}_{\gamma_1}H^{pq}_{\alpha\beta}\}\subset\dots, \qquad (1.9)$$

где $H^{pq}_{\alpha\beta}$ - неголономная ковариантная производная оснащающего объекта h^p_α [1] относительно линейной дифференциально-геометрической связности, индуцируемой этим

объектом в главном расслоенном пространстве P или $\dot{Q}$ [2], а ∇^t_γ - символ неголономной ковариантной производной относительно обеих индуцируемых связностей. Заметим, что величины, составляющие последовательность (1.9), являются тензорами и выражаются через величины последовательности (1.8). Например,

$$H^{pq}_{\alpha\beta}=h^{pq}_{\alpha\beta}-h^p_\beta h^q_\alpha, \quad \nabla H^{pq}_{\alpha\beta}=H^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_t, \qquad (1.10)$$

$$H^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}=h^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}-h^p_\beta h^{qt}_{\alpha\gamma}-h^q_\alpha h^{pt}_{\beta\gamma}, \qquad (1.11)$$

$$\nabla^t_\gamma H^{pq}_{\alpha\beta}=H^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}-h^p_\gamma H^{tq}_{\alpha\beta}-h^q_\gamma H^{pt}_{\alpha\beta}-h^t_\alpha H^{pq}_{\gamma\beta}-h^t_\beta H^{pq}_{\alpha\gamma}. \qquad (1.12)$$

Отметим, что, с точки зрения расслоенных пространств, нормализованное многообразие Грассмана является секущей поверхностью расслоенного пространства

$E = Gr(1.3)\times Gr(1,3)$, т.е.

$$f: Gr(1,3)\longrightarrow E.$$

Если проективное пространство P_3 отнести к новому подвижному реперу $\{H_\mathcal{J}\}$, где

$$H_p=A_p, \quad H_\alpha=A_\alpha+h^p_\alpha A_p, \qquad (1.13)$$

и его деривационные формулы записать в виде

$$dH_\mathcal{J}=\theta^\varkappa_\mathcal{J}H_\varkappa, \qquad (1.14)$$

то 1-формы $\omega^\varkappa_\mathcal{J}$ и $\theta^\varkappa_\mathcal{J}$ будут связаны следующими соотношениями:

$$\theta^\alpha_p=\omega^\alpha_p, \quad \theta^p_\alpha=\nabla h^p_\alpha+\omega^p_\alpha-h^p_\beta h^q_\alpha\omega^\beta_q,$$

$$\theta^p_q = \omega^p_q - h^p_\alpha \omega^\alpha_q, \quad \theta^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta + h^p_\beta \omega^\alpha_p, \tag{1.15}$$

а в секущей поверхности f лучу $\ell = (H_1, H_2)$ соответствует пара прямых $\ell - \ell^*$, где $\ell^* = (H_3, H_4)$.

Поскольку база расслоенного пространства является четырехмерной, то естественно при изучении секущей поверхности f рассмотреть лифты m-мерных подмногообразий базы (m = 1,2,3). Эти лифты будем называть m-мерными подмногообразиями нормализованного многообразия Грассмана, и они представляют из себя при m = 1 пары линейчатых поверхностей, при m = 2 пары конгруэнций, при m = 3 пары комплексов. (Подмногообразия нормализованного многообразия Грассмана будем выделять локально, т.е. через каждую точку базы будем проводить m – мерное подмногообразие Gr (1,3, m) и рассматривать лифт этого подмногообразия).

Зададим кривую $\ell = \ell(t)$ на базе расслоенного пространства E, т.е. линейчатую поверхность пространства P_3, дифференциальными уравнениями

$$\omega^\alpha_p = \xi^\alpha_p \theta, \ \nabla \xi^\alpha_p \wedge \theta = 0, \ \mathcal{D}\theta = 0. \tag{1.16}$$

Лифтом этой кривой является кривая секущей поверхности f: $\ell = \ell(t)$, $\ell^* = \ell^*(\ell)$. Дифференциальные уравнения лифта состоят из уравнений (1.3) и (1.16) и, в силу формул (1.10) и (1.15), приводятся к виду:

$$\omega^\alpha_p = \xi^\alpha_p \theta, \quad \theta^p_\alpha = \xi^p_\alpha \theta, \tag{1.17}$$

где

1) $$\xi^p_\alpha = H^{pq}_{\alpha\beta} \xi^\beta_q. \tag{1.18}$$

2) Величины ξ^α_p и ξ^p_α удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla \xi^\alpha_p = {}'\xi^\alpha_p \theta, \ \nabla \xi^p_\alpha = {}'\xi^p_\alpha \theta, \tag{1.19}$$

где в свою очередь

$${}'\xi^p_\alpha = H^{pqt}_{\alpha\beta\gamma} \xi^\beta_q \xi^\gamma_t + H^{pq}_{\alpha\beta} {}'\xi^\beta_q. \tag{1.20}$$

Система величин $\{\xi^\alpha_p, \xi^p_\alpha\}$ образует первый фундаментальный дифференциально-геометрический объект одномерного подмногообразия нормализованного многообразия Грассмана.

§2. Постановка и решение задачи

Выделим произвольное одномерное подмногообразие в нормализованном многообразии Грассмана. Первый фундаментальный дифференциально-геометрический объект этого подмногообразия $\{\xi^\alpha_p, \xi^p_\alpha\}$ имеет следующие подобъекты:

1) тензоры ξ^p_q и ξ^α_β, определенные равенствами

$$\xi^p_q = \xi^\alpha_q \xi^p_\alpha, \quad \xi^\alpha_\beta = \xi^\alpha_p \xi^p_\beta. \tag{2.1}$$

Компоненты этих тензоров являются решениями дифференциальных уравнений

$$\nabla \xi^p_q = {}'\xi^p_q \theta, \ \nabla \xi^\alpha_\beta = {}'\xi^\alpha_\beta \theta. \tag{2.2}$$

2) Абсолютный инвариант Λ, определенный равенствами

$$\Lambda = \xi^1_1 + \xi^2_2 = \xi^3_3 + \xi^4_4 = \xi^\alpha_p \xi^p_\alpha, \tag{2.3}$$

Причем, этот инвариант, в силу формул (1.18), можно представить в виде

$$\Lambda = P^{pq}_{\alpha\beta}\,\xi^{\alpha}_{p}\,\xi^{\beta}_{q}, \qquad (2.4)$$

где тензор $P^{pq}_{\alpha\beta}$ является симметричной частью тензора $H^{pq}_{\alpha\beta}$, т.е.

$$P^{pq}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(H^{pq}_{\alpha\beta} + H^{qp}_{\beta\alpha}). \qquad (2,5)$$

Тензоры ξ^{p}_{q} и ξ^{α}_{β} определяют на лучах ℓ и ℓ^* основные проективитеты пары линейчатых поверхностей (1.17), т.е. проективитеты, задаваемые схемой

$$\forall M = t^p H_p \in \ell \longrightarrow N = \pi(M) \times \ell^* \longrightarrow \widetilde{M} = \sigma(N) \times \ell,$$

$$\forall N = t^\alpha H_\alpha \in \ell^* \longrightarrow M = \sigma(N) \times \ell \longrightarrow \widetilde{N} = \pi(M) \times \ell^*,$$

где $\pi(M)$ и $\sigma(N)$ - плоскости, касательные к линейчатым поверхностям, составляющим пару в одномерном под - многообразии, в точках M и N. Формулы этих проективитетов имеют вид:

$$\rho\,\tilde{t}^p = \varepsilon^p_q\,t^q, \qquad \rho\,\tilde{t}^\alpha = \varepsilon^\alpha_\beta\,t^\beta. \qquad (2.6)$$

Проективитеты (2.6) будут инволютивными тогда и только тогда, когда абсолютный инвариант $\Lambda = 0$. В силу формул (2.4) и (2.5), всякое выделенное одномерное подмногообразие будет инволютивной парой линейчатых поверхностей тогда и только тогда, когда

$$H^{pq}_{\alpha\beta} = -\,H^{qp}_{\beta\alpha}, \qquad (2.7)$$

т.е. когда ковариантная производная оснащающего объекта

кососимметрична по парам индексов.

Покажем, что нормализация многообразия Грассмана при выполнении условий (2.7) является сильно вырожденной. С этой целью частично канонизируем репер, поместив вершины A_3 и A_4 на луч ℓ^* (аналитические условия канонизации $h^p_\alpha = 0$), тогда дифференциальные уравнения нормализованного многообразия Грассмана имеют вид:

$$\omega^p_\alpha = h^{pq}_{\alpha\beta}\,\omega^\beta_q, \qquad (2.8)$$

а условия (2.7), в силу (1.10), сводятся к виду

$$h^{pq}_{\alpha\beta} = -\,h^{qp}_{\beta\alpha}. \qquad (2.9)$$

Дифференциальное продолжение системы (2.8), т.е. система (1.5), принимает вид:

$$\nabla h^{pq}_{\alpha\beta} = 0, \qquad (2.10)$$

так как величины $h^{pqt}_{\alpha\beta\gamma} \equiv 0$, в силу следующих соотношений:

$$h^{pp}_{\alpha\alpha} = 0, \quad h^{ppt}_{\alpha\alpha\gamma} = 0, \quad h^{pqt}_{\alpha\beta\gamma} = h^{ptq}_{\alpha\gamma\beta} = -\,h^{qpt}_{\beta\alpha\gamma}.$$

Например,

$$h^{112}_{344} = h^{121}_{344} = -\,h^{211}_{434} = -\,h^{211}_{443} = h^{121}_{443} = h^{112}_{434} =$$

$$= -\,h^{112}_{344} \Rightarrow h^{112}_{344} = -\,h^{112}_{344} \Rightarrow h^{112}_{344} = 0.$$

Дифференцируя уравнения (2.10) внешним образом и учитывая (2.8), имеем

$$
\begin{aligned}
(h^{sq}_{\alpha\beta} h^{pt}_{\sigma\gamma} + h^{ps}_{\alpha\beta} h^{qt}_{\sigma\gamma} + h^{pq}_{\sigma\beta} h^{st}_{\alpha\gamma} + \\
+ h^{pq}_{\alpha\sigma} h^{st}_{\beta\gamma}) \omega^{\gamma}_{t} \wedge \omega^{\sigma}_{s} = 0 .
\end{aligned}
\qquad (2.11)
$$

Если проальтернировать уравнения (2.11) по парам индексов $\binom{\gamma}{t}$ и $\binom{\sigma}{s}$ и положить

1) $p=q=t=s$, $\alpha=\gamma=3$, $\beta=\sigma=4$, то получим $h^{pp}_{34}=0$;

2) $\alpha=\beta=\gamma=\sigma$, $p=s=1$, $q=t=2$, то получим $h^{12}_{\alpha\alpha}=0$;

3) $p=t=1$, $q=s=2$, $\alpha=\gamma=3, \beta=\sigma=4$, то получим $h^{12}_{34}=0$;

4) $p=s=1$, $q=t=2$, $\beta=\gamma=3, \alpha=\sigma=4$, то получим $h^{12}_{43}=0$.

Таким образом, условия (2.9) приводят к равенствам

$$h^{pq}_{\alpha\beta} \equiv 0 , \qquad (2.12)$$

из которых следует, что на нормализованном многообразии Грассмана 1-формы $\omega^{p}_{\alpha}=0$, т.е. луч ℓ^{*}- стационарен.

Итак, при выполнении условий (2.7) нормализация оказывается сильно вырожденной: всем прямым $\ell \in G_{\tau}$ (1.3) ставится в соответствие одна и та же фиксированная прямая ℓ^{*} . При такой нормализации говорить об одномерных подмногообразиях специального вида не имеет смысла.

Список литературы

1. Близникас В.И. Неголономное дифференцирование и линейные связности в пространстве опорных элементов.- Лит.мат.сб.,1966, 6, №2, с.141-208.

2. Близникас В.И. Некоторые вопросы теории неголономных комплексов.-"Тр.Геометр.семинара", ВИНИТИ АН СССР, 1974, 5, с.69-96.

3. Бразевич М.В. Об одном проективно-инвариантном классе пар конгруэнций в трехмерном пространстве.- "Тр.Томского ун-та", 212, Геом.сб., вып.9, 1972, с.120-133.

4. Ивлев Е.Т. О парах линейчатых поверхностей в P_3 .- "Тр.Томского ун-та", 161, Геом.сб.,вып.2, 1962,с.3-10.

5. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.- Тр.Моск.мат. о-на", 1953, № 2, с.275-382.

6. Лаптев Г.Ф. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований.-"Тр. 3-го Всес.Мат. съезда", т.3, М., АН СССР, 1958, с.409-418.