УДК 524.83

В. А. Юров, Р. В. Чириков

ΛCDM-МОДЕЛЬ С δ-ФУНКЦИЕЙ

Исследуется динамическая модель скалярного поля, эволюция которого приводит к SFS-сингулярности. Для оценки характерного времени поступления SFS вводится упрощенная модель с δ-функцией и используется слабый антропный принцип. Показано, что изучаемая модель предсказывает достаточно скорое появление SFS-сингулярности.

We study a dynamic model of a scalar field, the evolution of which leads to SFS-singularities. To estimate the characteristic SFS arrival time, we introduce a simplified model with the δ-function and use the weak anthropic principle. It is shown that our model predicts a rather soon appearance of the SFS-singularity.

Ключевые слова: стандартная модель, космологическая постоянная, сингулярность.

Keywords: standard model, cosmological constant, singularity.

Рассмотрим ΛCDM-модель с модифицированным давлением при $t = t_s$ [1]:

$$\rho = \rho_\Lambda + \frac{C_{DM}}{a^3}, \tag{1}$$

$$\frac{\rho}{c^2} = -\rho_\Lambda + \alpha_s^2 \delta\left[\frac{t_s - t}{T}\right]. \tag{2}$$

Здесь приняты стандартные обозначения: $\rho_\Lambda > 0$ — плотность вакуумной энергии; $a = a(t)$ — маштабный фактор, и второе слагаемое в (1) отвечает вкладу темной материи (мы включили малый вклад барионов в коэффициент C_{DM}). Необычно второе слагаемое в (2): при $t \neq t_s$ мы имеем обычное для вакуумной энергии уравнение состояния с $w = -1$ (или параметром адиабатичности $\gamma = 0$), однако при $t = t_s$ давление «взрывается», приводя к так называемым sudden future singularity (SFS), открытым Бэрроу в [2]. При этом, очевидно, все энергетические условия выполняются ($\alpha_s^2 > 0$), а параметр T введен из размерных соображений.

Мы рассматриваем плоскую метрику Фридмана — Робертсона — Уоккера

$$ds^2 = c^2 dt^2 - c^2(t)\left[dr^2 + r^2\left(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2\right)\right],$$

и динамические уравнения имеют вид

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_\Lambda + \frac{C_{DM}}{a^3}\right), \quad (3)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right). \quad (4)$$

С учетом δ-вклада в (2) понятно, что решение (3), (4) надо искать независимо в областях $t < t_s$ и $t > t_s$, после чего осуществлять сшивку при $t = t_s$.

При $t < t_s$ находим

$$a_{-}(t) \equiv a(t < t_s) = a_0\left[\frac{\Omega_{DM}(t_0)}{\Omega_\Lambda(t_0)} sh^2 \frac{t}{T}\right]^{\frac{1}{3}}, \quad (5)$$

где $t = t_0$ — текущий момент времени; $a_0 = a(t_0)$ и

$$\Omega_\Lambda(t) = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c(t)}, \quad \Omega_{DM}(t) = \frac{\rho_{DM}(t)}{\rho_c(t)}, \quad \rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}.$$

Кроме того, очевидно, $\Omega_\Lambda(t) + \Omega_{DM}(t) = 1$, и удается определить масштаб T:

$$T = \frac{1}{\sqrt{6\pi G \rho_\Lambda}}.$$

Удобно определить независимую переменную $\sigma = \gamma / T$ и иметь в виду полезные формулы

$$\rho = \rho_\Lambda\left(1 + \frac{1}{sh^2\sigma}\right), \quad H = \frac{2}{3T} cth\sigma = \frac{2}{3T\sqrt{\Omega_\Lambda(\sigma)}}, \quad \Omega_{DM} = \frac{1}{ch^2\sigma}.$$

Также легко проанализировать область $t > t_s$. Получаем

$$a_{+}(t) \equiv a(t > t_s) = a_0\left[\frac{\Omega_{DM}(t_0)}{\Omega_\Lambda(t_0)} sh^2 \frac{2(t_s - t)}{T}\right]^{\frac{1}{3}}. \quad (6)$$

Выбор сдвига аргумента определен условиями сшивки, которые подразумевают, что плотность не испытывает скачка. В противном случае мы получим более жесткую сингулярность, нежели SFS, а это значит, что геодезические не могут быть продолжены через $t = t_s$ и области $a_{-}(t)$ и $a_{+}(t)$ не могут быть причинно связаны. Во избежание недоразумений поясним, что речь идет только об изотропных геодезических.

Перейдем к сшивке. Обозначая

$$A^3 = \frac{a_0^3 \Omega_{DM}(t_0)}{\Omega_\Lambda(t_0)},$$

получаем

$$a_+(t_s) = a_-(t_s) = A\ sh^{\frac{2}{3}}\sigma_s, \tag{7}$$

$$\dot{a}_+(t_s) = -\dot{a}_-(t_s) = -\frac{2Ach\sigma_s}{3T(sh\sigma_s)^{\frac{1}{3}}}, \tag{8}$$

где $\sigma = t_s / T$. Другими словами, в момент SFS производная масштабного фактора испытывает скачок (точка разрыва первого рода).

Из (7) и (8) следует

$$H_+(t_s) = -H_-(t_s) = -\frac{2}{3T}cth\sigma_s. \tag{9}$$

Таким образом, при $t = t_s$ $(\sigma = \sigma_s)$ параметр Хоббла меняет знак и вселенная начинает сжиматься. Подчеркнем, что переход к стадии сжатия вызван исключительно SFS, несмотря на то, что плотность материи равна критической. При этом плотность остается непрерывной функцией своего аргумента:

$$\rho_+(t_s) - \rho_-(t_s) = \frac{3}{8\pi G}\left(H_+^2(t_s) - H_-^2(t_s)\right) = 0.$$

У нас остались полностью неопределенными величина α_s^2 и время наступления SFS. На первый взгляд, из заданной системы уравнений эти величины не могут быть определены. Это, безусловно, верно, однако их можно оценить более «тонким» образом, используя антропный принцип.

Прежде всего используем уравнение (4), которое запишем в виде

$$\ddot{a} = (\textit{Регулярная функция})(t)\cdot a(t) - 4\pi G\alpha_s^2\delta\left(\frac{t_s - t}{T}\right)a(t), \tag{10}$$

где

$$(\textit{Регулярная функция})(t) = -\frac{4\pi G}{3}\rho_\Lambda\left(\frac{1}{sh^2\frac{t}{T}} - 2\right).$$

Как следует из обозначения, первый член в (10) регулярен, в том числе при $t = t_s$. Проинтегрируем (10) в интервале от $t_s - \varepsilon$ до $t_s + \varepsilon$ и перейдем к пределу $\varepsilon \to 0$.

Получаем

$$\dot{a}_+(t_s) - \dot{a}_-(t_s) = -4\pi G\alpha_s^2 \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_s-\varepsilon}^{t_s+\varepsilon} dt\cdot a(t)\delta\left(\frac{t_s - t}{T}\right) = -4\pi G\alpha_s^2 Ta(t_s). \tag{11}$$

Подставляя для $a(t_s)$ выражение (7) и сравнивая (11) и (8), находим

$$\alpha_s^2 = \rho_\Lambda cth\sigma_s. \tag{12}$$

Таким образом, мы установили связь параметра SFS α_s^2 с моментом времени наступления SFS $t = t_s$. Для дальнейшего анализа будем использовать $\rho_\Lambda \approx 0{,}7 \times 10^{-29} \frac{г}{см^3}$, что дает $T \approx 10^{10}$ лет (то есть T — не возраст вселенной, который составляет $1{,}3 \times 10^{10}$ лет). Перепишем (12) в виде

$$\frac{t_s}{T} = arccth\left(\frac{\alpha_s^2}{\rho_\Lambda}\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha_s^2 + \rho_\Lambda}{\alpha_s^2 - \rho_\Lambda}\right|. \tag{13}$$

Так как $cth\sigma_s > 0$ $(\sigma_s > 0), \alpha_s^2 > \rho_\Lambda$. Но насколько больше? Очевидно, рост отношения $\alpha_s^2 / \rho_\Lambda$ уменьшает t_s / T, то есть при малых σ_s имеет место (с хорошей точностью) соотношение

$$\frac{t_s}{T} \approx \left(\frac{\alpha_s^2}{\rho_\Lambda}\right)^{-1}.$$

Например, при $\alpha_s^2 / \rho_\Lambda \approx 10^3$ получаем $t_s / T \sim 10^{-3}$, то есть $t_s \sim 10^7$ лет, что, очевидно, абсурдно. С другой стороны, условие $t_s > T$ приводит к верхней границе неравенства

$$1 < \frac{\alpha_s^2}{\rho_\Lambda} < cth \approx 1{,}3. \tag{14}$$

Обсудим ограничения на t_s сверху. Как известно, dS-космология (и ΛCDM-модель в частности) приводит к проблеме «больцмановских мозгов» — Boltzman brains или в дальнейшем просто BB [6—11]. Как показано Пэйджем, эти проблемы возникают [6; 9; 10] на временах, больших $t > t_{BB} = 10^{60}$ лет. Естественно, возникает вопрос: может ли t_s быть больше t_{BB}? Легко увидеть, что это имеет место, лишь если

$$1 < \frac{\alpha_s^2}{\rho_\Lambda} < \frac{1 + \exp\left(2 \times 10^{50}\right)}{\exp\left(2 \times 10^{50}\right) - 1} \approx 1 + 2\exp\left[-2 \times 10^{50}\right].$$

Такая сверхтонкая (допуская известную вольность речи, такую настройку можно назвать «гугл-тонкой») настройка выглядит совершенно неестесвенно, проблемы BB здесь не возникает.

Но это сразу указывает, что слишком большой ожидаемый возраст вселенной G будет тоже маловероятен. Таким образом, имеем следующую ситуацию: если $\alpha_s^2 >> \rho_\Lambda$, то $t_s << T$, поэтому возникновение наблюдателя невозможно. Другими словами, условие $\alpha_s^2 / \rho_\Lambda >> 1$ исключается слабым антропным принципом, и, сравнивая с (13), мы заключаем, что наиболее типично считать α_s^2 и ρ_Λ величинами одного порядка. При этом совершенно нет необходимости предполагать наличие некоторой неизвестной пока физики, которая свяжет α_s^2 и ρ_Λ, достаточно слабого антропного принципа. Для удобства положим $\alpha_s^2 / \rho_\Lambda = 1{,}155$ (то есть ожидаемое значение $\alpha_s^2 / \rho_\Lambda$ лежит посередине интервала (14)).

Окончательно подставляя это значение в (13), получаем ожидаемое время t_s:

$$t_s = T \times arccth(1{,}155) \approx 1{,}316 \times 10^{10} \text{ лет.}$$

Таким образом, в рамках данной модели SFS должна произойти в достаточно близком будущем!

Заметим, что этот вывод парадоксальным образом близок к заключению, сделанному в работе [12]. Это достаточно интересно, потому что авторы данного исследования исходили из совсем иных предположений, а именно: они предполагали рассматривать SFS как альтернативу темной энергии (космологической постоянной). Мы же считаем, что темная материя генерируется медленно меняющимся скалярным полем [13], которое, в контексте идей Бэрроу, может приводить к SFS [14].

В заключение попробуем составить общее представление о потенциале скалярного поля, приводящего к такому поведению.

Введем функцию

$$U_k(\sigma) = \frac{k\alpha_s^2}{2ch^2\left[k(\sigma_s - \sigma)\right]}$$

так, что

$$\lim_{k\to+\infty} U_k(\sigma) = \alpha_s^2 \delta(\sigma_s - \sigma),$$

и обозначим

$$p_k = c^2\left(U_k(\sigma) - \rho_\Lambda\right)$$

так, что

$$\lim_{k\to\infty} p_k = p\,,$$

где p определено формулой (2).

Поскольку δ-функция, по нашему предположению, генерируется некоторым скалярным полем с минимальной связью, мы положим (здесь и ниже $c = \frac{8\pi G}{3} = 1$), что

$$\begin{aligned} \rho_\varphi &= \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) = 0, \\ p_\varphi &= \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) = \alpha_s^2 \delta(\sigma_s - \sigma). \end{aligned} \tag{15}$$

Выражение (15) считаем предельным случаем (при $k \to +\infty$) от вспомогательных полей $\varphi^{(k)}$ — таких, что

$$\frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}^{(k)}\right)^2 + V\left(\varphi^{(k)}\right) = 0$$

и

$$\frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}^{(k)}\right)^2 - V\left(\varphi^{(k)}\right) = \frac{k\alpha_2^s}{2ch^2\left(k\left(\sigma_s - \sigma\right)\right)} \equiv U_k\left(\sigma\right),$$

где точка означает дифференцирование по старой переменной t, а не σ.

После интегрирования получаем

$$\varphi^{(k)} = \varphi_{SFS} \mp \alpha_s T\sqrt{\frac{2}{k}} arcthg\left[\exp\left(\frac{k\left(t_s - t\right)}{T}\right)\right],$$

$$V\left(\varphi^{(k)}\right) = -\frac{k\alpha_s^2}{8}\sin^2\left[\frac{2}{\alpha_2 T}\sqrt{\frac{k}{2}}\left(\varphi_{SFS} - \varphi^{(k)}\right)\right].$$

То есть возникает потенциал знаменитой модели синус-Гордон. Разумеется, при $k \to \infty$, $\varphi^{(k)} \to \varphi_{SFS}$, а $V\left(\varphi^{(k)}\right) \to -\infty$. Переопределяя полевую переменную $\theta = \varphi_{SFS} - \varphi^{(k)}$, получаем, что SFS возникает при $\theta \to 0$ в согласии с результатом Бэрроу.

Мы показали, что «неожиданные будущие сингулярности» (SFS) при конечном значении масштабного фактора возникают на весьма близких по отношению к моменту нашего наблюдения временах, что согласуется с ранними работами Добровски, и при исчезновении поля $\theta \to 0$, что согласуется с результатом Бэрроу. Таким образом, SFS-сингулярности вполне могут оказаться в нашем не столь отдаленном будущем!

Список литературы

1. *Yurov A.V., Astashenok A.V., Yurov V.A.* The Cosmological Models with Jump Discontinuities // Eur. Phys. J. C. 2018. Vol. 78, iss. 7, 542. URL: https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-6020-9 (дата обращения: 11.02.2019).
2. *Barrow J.D.* Sudden Future Singularities // Class. Quant. Grav. 2004. Vol. 21, iss. 11. P. L79—L82.
3. *Barrow J.D.* More General Sudden Singularities // Class. Quant. Grav. 2004. Vol. 21, iss. 23. P. 5619—5622.
4. *Barrow J. D., Batista A. B., Dito G. et al.* Sudden Singularities Survive Massive Quantum Particle Production // Phys. Rev. D. 2011. Vol. 84, iss. 12, 123518.
5. *Barrow J.D., Cotsakis S.* Geodesics at Sudden Singularities // Phys. Rev. D. 2013. Vol. 88, iss. 6, 067301.
6. *Page D.N.* The Lifetime of the Universe // J. Korean Phys. Soc. 2006. Vol. 49, iss. 2. P. 711—714. arXiv:hep-th/0510003.
7. *Yurov A.V., Yurov V.A.* One More Observational Consequence of Many-Worlds Quantum Theory. 2005. arXiv:hep-th/0511238.
8. *Linde A.* Sinks in the Landscape, Boltzmann Brains, and the Cosmological Constant Problem // J. Cosmol. Astropart. Phys. 2007. Vol. 1. 022. arXiv:hep-th/0611043.
9. *Page D.N.* Is Our Universe Likely to Decay within 20 Billion Years? // Phys. Rev. D. 2008. Vol. 78, iss. 6, 063535. arXiv:hep-th/0610079.
10. *Page D.N.* Return of the Boltzmann Brains // Phys. Rev. D. 2008. Vol. 78, iss. 6, 063536, 2008. arXiv:hep-th/0611158.

11. *Vilenkin A.* Freak Observers and the Measure of the Multiverse // J. High Energy Phys. 2007. Vol. 1. 092. arXiv:hep-th/0611271.

12. *Ghodsi H., Hendry M.A., Dabrowski M.P., Denkiewicz T.* Sudden Future Singularity Models as an Alternative to Dark Energy? 2001. arXiv:1101.3984 [astro-ph.CO].

13. *Garriga J., Vilenkin A.* Testable Anthropic Predictions for Dark Energy // Phys. Rev. D. 2003. Vol. 67, iss. 4, 043503. arXiv:astro-ph/0210358.

14. *Barrow J.D., Graham A.H.* New Singularities in Unexpected Places // Int. J. Mod. Phys. D. 2015. Vol. 24, iss. 1544012 (2015). arXiv:1505.04003 [gr-qc].

15. *Astashenok A.V., Elizalde E., Yurov A.V.* The Cosmological Constant as an Eigenvalue of a Sturm-Liouville Problem // Astrophysics and Space Science, Astrophys Space Sci (2014) 349: 25. https://doi.org/10.1007/s10509-013-1606-z.

Об авторах

Валериан Артемович Юров — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: VIUrov@kantiana.ru

Роман Викторович Чириков — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: RCHirikov1@kantiana.ru

The authors

Dr Valerian A. Yurov, Associate Professor, I. Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: VIUrov@kantiana.ru

Roman V. Chirikov, PhD Student, I. Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: RCHirikov1@kantiana.ru