3. *Малаховский В.С.* Конгруэнции линейчатых квадрик в трехмерном проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1977. Вып. 8. С.32-42.

4. *Фиников С.П.* Теория конгруэнций. М.: ГИТТЛ, 1950. 528с.

V. S. M a l a k h o v s k y

ON ONE CLASS OF CONGRUENCES OF OSCULATING QUADRICS DARBOUX OF A NONRULED SURFACE

A congruence (Q_m) of osculating quadrics Darboux of a smooth nonruled surface S is investigated in a three-dimensional projective space, whose associated quadrics are nondegenerated cones, containing the first directrix Wilczynsci. It is proved that points of intersection of a quadric $Q_m \subset (Q_m)$ with the first directrix Wilczynsci of the surface S are focal points of the quadric Q_m, where the surface S is a double focal surface of the congruence (Q_m). A subclass of the congruences (Q_m) is investigated in detail, defined by a totally integrable system of Pfaffian equations. Quadrics of this subclass envelop a surface of a new type, possessing interesting geometric properties.

УДК 514.75

ОБ n-ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВАХ АФФИННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Н. В. М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)

Изучается n-параметрическое семейство H_n аффинных отображений h: $A_n \to a_n$ n-мерных аффинных пространств. Построены поля фундаментальных геометрических объектов первого и второго порядков. Исследованы их подобъекты и охваты. Рассмотрены фокальные многообразия семейства H_n. В случае центроаффинного пространства A_n определена индуцированная семейством H_n инвариантная метрика в A_n, а в пространстве a_n - аффинная связность.

§1. Фундаментальные объекты семейства аффинных отображений

Рассмотрим два n-мерных аффинных пространства A_n, a_n и множество H всевозможных аффинных отображений h: $A_n \to a_n$. Отнесем пространства A_n и a_n к реперам $\left\{A;\vec{E}_I\right\}$, $\left\{a;\vec{e}_i\right\}$ (i,j,k,I,J,K=$\overline{1,n}$). Деривационные формулы этих реперов и структурные уравнения пространств A_n и a_n запишутся в виде [1]:

$$d\vec{A}=\Omega^I\vec{E}_I,\ d\vec{E}_I=\Omega_I^K\vec{E}_K,\ d\Omega^I=\Omega^K\wedge\Omega_K^I,\ d\Omega_I^K=\Omega_I^J\wedge\Omega_J^K;$$
$$d\vec{a}=\omega^i\vec{e}_i,\ d\vec{e}_i=\omega_i^k\vec{e}_k,\ d\omega^i=\omega^k\wedge\omega_k^i,\ d\omega_i^k=\omega_i^j\wedge\omega_j^k.$$

Пусть $M(X^I)$ и $m(x^i)$ две соответственные точки при аффинном отображении h. Тогда аффинное отображение h задается формулами

$$x^i=M_I^iX^I+p^i \tag{1}$$

$\det\left(M_I^i\right)\neq 0$. Обозначим: $f^i=M_I^iX^I+p^i-x^i$. Используя формулы $dX^I=-X^K\Omega_K^I-\Omega^I$, $dx^i=-x^k\omega_k^i-\omega^i$, находим:

$$df^i=-f^k\omega_k^i+\nabla M_I^iX^I+\Delta p^i \tag{2}$$

где $\nabla M_I^i=dM_I^i-M_K^i\Omega_I^K+M_I^k\omega_k^i$, $\Delta p^i=dp^i+p^k\omega_k^i-M_I^i\Omega^I+\omega^i$. Следовательно, формы Пфаффа ∇M_I^i, Δp^i являются структурными формами отображения h. Обозначим:

$$\theta^i=\Delta p^i. \tag{3}$$

В общем случае, формы Пфаффа θ^i линейно независимы: $\theta^1\wedge\theta^2\wedge\ldots\wedge\theta^n\neq 0$ и их можно принять за базисные формы n-параметрического семейства H_n аффинных преобразований h. Система пфаффовых уравнений семейства H_n запишется в виде:

$$\nabla M_I^i=\lambda_{Ik}^i\theta^k. \tag{4}$$

Имеем:

$$D\theta^i=\theta^k\wedge\left(\omega_k^i-\lambda_{Ik}^i\Omega^I\right), \tag{5}$$

$d\left(\nabla M_I^i\right)=\theta^k\wedge\left(\lambda_{Ik}^j\omega_j^i-\lambda_{Kk}^i\Omega_I^K\right)$. Продолжая систему (4), находим:

$$\Delta\lambda_{Ik}^i=\lambda_{Ikj}^i\theta^j,\ \lambda_{Ikj}^i=\lambda_{Ijk}^i, \tag{6}$$

где

$$\Delta\lambda_{Ik}^i=d\lambda_{Ik}^i-\lambda_{Kk}^i\Omega_I^K-\lambda_{Ij}^i\omega_k^j+\lambda_{Ik}^j\omega_j^i+\lambda_{Ij}^i\lambda_{Kk}^j\Omega^K. \tag{7}$$

Системы величин $\left\{M_I^i,p^k\right\}$, $\left\{M_I^i,p^k,\lambda_{Ij}^i\right\}$, $\left\{M_I^i,p^k,\lambda_{Ij}^i,\lambda_{Ijl}^i\right\}$ образуют фундаментальные объекты семейства H_n соответственно нулевого, первого и второго порядков [2]. Из (4) следует, что система величин $\left\{M_I^i\right\}$ является тензором. Система величин $\left\{\overset{*}{M}{}_i^K\right\}$, определяемая соотношениями $\overset{*}{M}{}_i^K M_K^j=\delta_i^j$, $\overset{*}{M}{}_k^I M_K^k=\delta_K^I$, также является тензором:

$$d\overset{*}{M}{}_i^K=-\overset{*}{M}{}_j^K\overset{*}{M}{}_i^L\lambda_{Lk}^j\theta^k-\overset{*}{M}{}_i^L\Omega_L^K+\overset{*}{M}{}_j^K\omega_i^j. \tag{8}$$

Обозначим:

$$\overset{*}{P}{}^{I} = \overset{*}{M}{}^{I}_{i}\, p^{i}. \tag{9}$$

Имеем:

$$d\overset{*}{P}{}^{I} = \left(\overset{*}{M}{}^{I}_{k} - \overset{*}{M}{}^{I}_{j}\overset{*}{M}{}^{L}_{i}\, p^{i}\lambda^{j}_{Lk}\right)\theta^{k} - \overset{*}{P}{}^{K}\Omega^{I}_{K} - \overset{*}{M}{}^{I}_{i}\,\omega^{i} + \Omega^{I}. \tag{10}$$

Из (8), (10) следует, что система величин $\left\{\overset{*}{P}{}^{I}, \overset{*}{M}{}^{K}_{i}\right\}$ образует линейный геометрический объект. Он определяет аффинное отображение h^{-1}: $a_n \to A_n$: $X^{I} = \overset{*}{M}{}^{I}_{i}\, x^{i} - \overset{*}{P}{}^{I}$, обратное отображению $h \in H_n$. Обозначим: $\theta^{j}_{i} = \omega^{j}_{i} - \lambda^{j}_{Ki}\Omega^{K}$. Уравнения (5) запишутся в виде $d\theta^{i} = \theta^{k} \wedge \theta^{i}_{k}$. Используя (6), находим:

$$d\theta^{j}_{i} = \theta^{k}_{i} \wedge \theta^{j}_{k} + \lambda^{j}_{Kik}\Omega^{K} \wedge \theta^{k}. \tag{11}$$

Вполне интегрируемая система форм Пфаффа $\left\{\theta^{i}, \theta^{k}_{j}\right\}$ определяет главное расслоение линейных реперов, присоединенное к семейству H_n.

Рассмотрим вспомогательное n-мерное голономное дифференцируемое многообразие V_n [4], [5], отнесенное к реперу $\left\{b, \vec{m}_i, \vec{m}_{ij}, \ldots\right\}$, причем $d\vec{b} = \theta^{i}\vec{m}_i$, $d\vec{m}_i = \theta^{k}_{i}\vec{m}_k + \theta^{j}\vec{m}_{ij}$, где векторы $\vec{m}_i$ и $\vec{m}_{ij}$ принадлежат касательному и соприкасающемуся пространству к многообразию V_n в точке b. Биективное отображение φ: $H_n \to V_n$, определенное формулой φ(h)=b, устанавливает биективное соответствие между H_n и множеством всех линейных преобразований касательного пространства к многообразию V_n в точке b. Действительно, при $\theta^{i}=0$, т.е. для фиксированного отображения $h \in H_n$, формулы (11) приводятся к виду: $d\overline{\theta}{}^{j}_{i} = \overline{\theta}{}^{k}_{i} \wedge \overline{\theta}{}^{j}_{k}$ ($\overline{\theta} = \theta\big|_{\theta^{i}=0}$), что характеризует линейное преобразование. Рассмотрим систему величин:

$$c_i = \overset{*}{M}{}^{K}_{j}\,\lambda^{j}_{Ki}. \tag{12}$$

Дифференцируя (12) с учетом (8), (6), находим:

$$dc_i = c_{ih}\theta^{h} + c_k\theta^{k}_{i}, \text{ где } c_{ih} = \overset{*}{M}{}^{K}_{j}\left(\lambda^{j}_{Kih} - \overset{*}{M}{}^{L}_{k}\,\lambda^{k}_{Kh}\lambda^{j}_{Li}\right).$$

Следовательно, $\{c_i\}$ - ковариантный вектор в касательном пространстве к многообразию V_n. Он определяет неголономную гиперповерхность в семействе H_n: $c_i\theta^{i}=0$.

§2. Фокальные многообразия семейства H_n

Из (2), (3), (4) следует: $df^{i} = -f^{k}\omega^{i}_{k} + \left(\lambda^{i}_{Ik}X^{I} + \delta^{i}_{k}\right)\theta^{k}$. Обозначим:

$$f^i_k = \lambda^i_{Ik} X^I + \delta^i_k . \qquad (13)$$

Отображение h: $A_n \to a_n$ семейства H_n определяется уравнениями $f^i=0$. Назовем точку $(X^I,x^i) \in A_n \times a_n$ фокальной точкой отображения $h \in H_n$, если существует направление

$$\theta^i = t^i \nu, \qquad (14)$$

где ν -параметрическая форма, вдоль которой эта точка принадлежит двум смежным отображениям. Из этого определения следует, что координаты X^I, x^i фокальной точки удовлетворяют системе уравнений $f^i=0$, $f^i+df^i=0$, т.е. системе

$$f^i=0, \; f^i_k \theta^k = 0 . \qquad (15)$$

Направление (14) называется фокальным направлением семейства H_n. Исключая из уравнений (15) базисные формы θ^k, получим систему уравнений для определения фокальных точек отображения $h \in H_n$:

$$f^i=0, \; \det(f^i_k)=0. \qquad (16)$$

Эта система состоит из n+1 уравнений на 2n координат X^I, x^k. Определяя из уравнений $f^i=0$ координаты x^i и подставляя их значения в оставшееся уравнение (16), убеждаемся, что проекция множества фокальных точек на пространство A_n образует в нем алгебраическую гиперповерхность S порядка 2^n. Аналогично исключая X^I, получим, после подстановки в уравнение $\det(f^i)=0$, алгебраическую гиперповерхность $\sigma \subset a_n$ порядка 2^n. Назовем S и σ фокальными гиперповерхностями отображения $h \in H_n$. Из (13) следует, что выбором θ^i в качестве базисных форм семейства H_n исключается возможность совмещения начала $A \in A_n$ репера с фокальной точкой отображения h.

§3. Отображение h_c

Пусть в аффинном пространстве A_n зафиксирована точка C. Обозначим через CA_n центроаффинное пространство с центром C. Отображение h, переводящее CA_n в a_n обозначим символом h_c. Поместим начало A репера в точку C. Тогда

$$\Omega^I \equiv 0. \qquad (17)$$

Из (1) следует, что система величин p^i для каждого отображения h_c определяет в пространстве a_n инвариантную точку $p=h_c(C)$: $\vec{p}=p^i \vec{e}_i$. В силу (17) и (7) геометрический объект $\{\lambda^i_{Ij}\}$ в случае отображения h_c является тензором: $\nabla\lambda^i_{Ij} = \lambda^i_{Ijk}\theta^k$. Тензор λ^i_{Ij} охватывает ковектор в пространстве CA_n: $\Lambda_I=\lambda^i_{Ij}$, который задает для каждого h_c инвариантную гиперплоскость в CA_n: $\Lambda_I X^I-1=0$. Ее образом является гиперплоскость: $\Lambda_I \overset{*}{M}{}^I_i (x^i-p^i)-1=0$, неинцидентная точке p. Тензор $M_{IK}=\Lambda_I\Lambda_K$ определяет в центроаффинном пространстве CA_n инвариантную метрику $ds^2=M_{IK}\nabla X^I \nabla X^K$. Совмещая начало a репера пространства a_n с инвариантной точкой p, приводим базисные формы θ^i к виду: $\theta^i=\omega^i$. Тензор $\gamma^i_{jk} = \overset{*}{M}{}^I_j \lambda^i_{Ik}$ определяет в пространстве a_n аффинную связность γ. Действительно, формы Пфаффа $\tilde{\omega}^i=\omega^i$, $\tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j + \gamma^i_{jk}\omega^k$ удовлетворяют уравнениям структуры пространства аффинной связности [3]:

$$D\tilde{\omega}^i = \tilde{\omega}^p \wedge \tilde{\omega}^i_p - \gamma^i_{[pm]}\tilde{\omega}^p \wedge \omega^m,$$

$$D\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + \left(\gamma^i_{j[ms]} + \gamma^k_{j[m}\gamma^i_{|k|s]}\right)\tilde{\omega}^s \wedge \tilde{\omega}^m,$$

причем $\nabla\gamma^i_{jm} = \gamma^i_{jms}\theta^s$, $\gamma^i_{jms} = \overset{*}{M}{}^I_j \lambda^i_{Ims} - \overset{*}{M}{}^I_k \overset{*}{M}{}^L_j \lambda^k_{Ls}\lambda^i_{Im}$.

Библиографический список

1. *Малаховский В. С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1980. 84 с.
2. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. о-ва. М., 1953. Т.2. С.275-383.
3. *Рыбников А. К.* Аффинные связности, индуцируемые на многомерных поверхностях аффинного пространства // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.6. С.135-155.
4. *Акивис М. А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977. 84с.
5. *Шевченко Ю. И.* Связности голономных и неголономных дифференцируемых многообразий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1994. Вып. 25. С.110-121.

N. V. M a l a k h o v s k y

ON n-PARAMETRIC FAMILIES OF AFFINE MAPS

An n-parametric family H_n of affine maps $h: A_n \to a_n$ of n-dimensional affine space is studied. Field of fundamental geometric object of the first and second orders are constructed. Their subobject and scopes are investigated. Focal manifolds of the family H_n are considered. In the case of a (centroaffine) space A_n an invariant metric in A_n, and in the space a_n an affine connection is defined, induced by the family H_n.

УДК 514.75

SPEZIELLE DISTRIBUTIONEN AUF GRASSMANN’SCHER MANNIGFALTIGKEIT (I)