УДК 538.935

А. А. Юрова, В. А. Юров, А. В. Юров

ПРИНЦИП КОНЕЧНОГО ДЕЙСТВИЯ И НЕСИНГУЛЯРНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Поступила в редакцию 20.01.2022 г.
Рецензия от 02.02.2022 г.

Предпринята попытка рассмотреть гипотетические космологические модели, свободные от сингулярностей двух типов: расходящегося действия и расходящейся скалярной кривизны. Такие модели образуют чрезвычайно узкий подкласс и выглядят достаточно неестественно. Тем не менее наша цель — показать, что такие космологии возможны в принципе без вступления в противоречие с текущими физическими парадигмами.

In this work, an attempt is made to consider hypothetical cosmological models free from two types of singularities: divergent action and divergent scalar curvature. Such models form an extremely narrow subclass and look quite unnatural. However, our goal is to show that such cosmologies are possible in principle without conflicting with current physical paradigms.

Ключевые слова: космология, уравнения Фридмана, сингулярность, действие, модель Деситтера

Keywords: cosmology, Friedmann equations, singularity, action, Desitter model

1. Введение

Хотя космология является только одним из разделов физики (и астрономии), у нее есть принципиальная особенность: именно космология определяет фоновое пространство-время, в которое «погружены» все остальные физические системы. Это означает, что набор требований согласованности, наложенных на космологические модели, должен быть гораздо более жестким, чем для остальных областей физики.

Мы начнем с мало используемого в литературе условия конечности действия [1; 2]. Это чрезвычайно мощное ограничение на космологические модели — пожалуй, мощнее всех других известных нам ограничений. «Философия» и идеология этого подхода подробно описаны в процитированных работах. Если коротко действие должно быть конечно при квантовании методом функционального интеграла, иначе в этих выражениях нет никакого смысла, а значит, не существует никакой осмысленной квантовой теории. Например, все рассуждения о симметриях формулируются на языке действия, что тоже подразумевает его конечность. Прекрасный пример — инстантоны, которые ex definition требуют конечного действия. Конечность действия важна и в классической теории поля: чтобы получить уравнения движения, варьируя действие, или нетеровские токи (что уже подразумевает выполнение полевых уравнений Лагранжа — Эйлера), необходимо интегрировать по частям и отбрасывать поверхностные члены, что имеет смысл только при исчезновении вкладов на бесконечности (точнее, на бесконечно удаленной гиперповерхности). Другими словами, действие должно быть конечным. Строго говоря, это не чисто математическое, а скорее физическое условие. Скажем, если рассматривать чисто однородное электрическое поле, то лагранжиан, являющийся лоренцевым скаляром

$$F_{\mu\nu}^2 \sim \vec{E}^2 - \vec{B}^2 = E^2,$$

оказывается константой и действие расходится, если интегрировать по всему бесконечному пространству. Но такое интегрирование не имеет смысла в реальности, так как реальное однородное электрическое поле находится, скажем, в конденсаторе, между двумя пластинами в аккумуляторе, и занимает конечный объем. Другими словами, однородные поля, заполняющие весь бесконечный объем, — это чисто формальные решения уравнений Максвелла, которые не могут быть получены вариацией действия и одновременно не имеют физического смысла. Этот пример наглядно демонстрирует, почему финитность действия — реальный (и часто очевидный) физический принцип. Вот еще замечательный иллюстративный случай. Уравнения Дэви — Стюартсона (ДС) [3] (двумерное интегрируемое обобщение НУШ) можно получить из принципа наименьшего действия, как показал в свое время Минору Омоте [4], который вывел бесконечное число законов сохранения из теоремы Нетёр для ДС-1[1]. Однако ДС допускает точные решения в виде плоских солитонов по типу солитонов уравнений Кадомцева — Петвиашвили и другие решения, не стремящиеся асимптотически к нулю на пространственной бесконечности по всем направлениям на плоскости, поэтому, строго говоря, эти решения не стоит связывать с лагранжевым формализмом. Исключение составляют только дромионы, найденные Бойти — Леоном — Пемпинелли (БЛП) [5] и независимо Саллем, Лебле и Юровым [6]. Еще более наглядная демонстрация проявляется в примере, полученном в работах [7; 8], связанных с уравнением БЛП. В них показано, что БЛП допускает одномерную редукцию в диссипативное уравнение Бюргерса (что позволяет развить некоторую процедуру «одевания» уравнения Бюргерса и даже говорить о двумерных интегрируемых диссипативных структурах). Но тут возникает странность: БЛП было выведено авторами как двумерное обобщение уравнения синус-Гордон, в котором нет никакой диссипации! Более того, в работе [9] для БЛП описана гамильтонова структура [9]. Как же увязать эти два факта, которые явно противоречат друг другу? Ответ был дан в процитированных выше статьях: все дело в граничных условиях. В частности,

[1] Н. Кострикова сделала это для уравнений ДС-2 в своем дипломном проекте.

Гарагаш вывела гамильтоновы уравнения в предположение того, что поля (их там два) затухают на бесконечности. Решения же, ассоциированные с диссипативными структурами, имеют неограниченные линии уровня, то есть гамильтониан для них расходится. Если перейти от гамильтонова к лагранжеву формализму, то эти два случая отличаются величиной действия. «Диссипативные» решения уравнений БЛП соответствуют тому, что вычисленное для них действие расходится. И это замечательный иллюстрирующий пример физической содержательности условия финитности действия: для диссипативных структур действие очевидно и не должно иметь смысла, и то, что оно здесь расходится, показывает, что принцип финитности действия действительно физически содержателен. Расходимость действия на конкретных, формально вроде бы верных решениях — суть «лакмусовая бумажка» свидетельствующая о том, что лагранжев формализм перестал иметь смысл!

Если всерьез воспринимать принцип финитного действия (ПФД), то нужно проанализировать и другие случаи. Например, как насчет стационарных решений типа константа? Рассмотрим для примера скалярное поле с полиномиальным потенциалом типа ϕ^4 или квадратичным массовым членом. В этом случае уравнения движения очевидно допустят только тривиальное решение. Нетривиальное постоянное решение отвечает случаю спонтанно нарушенной симметрии, скажем, с потенциалом

$$V \sim (\phi^2 - c^2)^2,$$

но точные решения в виде констант тут очевидно равны $\phi = \pm c$ (ну и тривиальное решение $\phi = 0$), а при их подстановке действие обнуляется. Нет никакой загадки и в постоянных решениях в механике (скажем, частица, лежащая на столе, с постоянной потенциальной и нулевой кинетической энергиями). Действительно, в механике интегрируют функцию Лагранжа на конечном интервале с условием исчезновения вариаций на концах интервала, так что действие там конечно (разумеется, для непатологических функций Лагранжа).

Теперь обратимся к космологии.

2. ПФД в космологии

Как показали Бэрроу и Типлер, полное действие состоит из трех частей: гравитационного действия, действия полей материи и граничного члена. Последний можно убрать, если и только если действие конечно. Гравитационный лагранжиан — это скалярная кривизна, и ее следует умножить на корень из минус детерминанта метрического тензора (мы используем сигнатуру $(+,-,-,-)$). Лагранжиан полей материи определяется в зависимости от типа этой материи. Скажем, для идеальной жидкости с тензором энергии — импульса

$$T_\nu^\mu = (p+\rho)u^\mu u_\nu - p\delta_\nu^\mu$$

лагранжиан пропорционален шпуру ТЭИ. Но для электромагнитного поля такой лагранжиан равен нулю (конформная инвариантность приводит к бесследовости ТЭИ), и потому надо использовать обычный лагранжиан F^2. Важно помнить в дальнейшем, что действие конечно, если конечны оба слагаемых (поверхностный член мы уже отбросили).

Первое важнейшее наблюдение, сделанное Бэрроу и Типлером: справедливость ПФД для (примерно) однородных и изотропных моделей означает, что фридмановская вселенная должна быть замкнута! Мы назовем это утверждением 1. Причина очевидна: если вселенная незамкнута (на математическом языке правильнее говорить о некомпактности, то есть в классе фридмановских космологий это либо 3-сфера, либо тор), то пространственный интеграл от функции Лагранжа расходится. Отсюда следует вывод: неверны как модели стационарной вселенной Бонди, Голда, Хойла и Нарликара, так и инфляционные модели Готта, Гута, Линде и Виленкина, то есть модель вечной инфляции сразу отвергается этим принципом! Это, конечно, очень неприятное заключение, причем не для инфляции, а для ПФД: инфляция слишком хорошо подтверждается наблюдениями, чтобы отказываться от нее из-за одного, пусть даже звучащего очень правдоподобно, принципа. Однако — и это одно из ключевых мест нашей статьи — ниже мы покажем, что тут есть одна замечательная лазейка, позволяющая примирить вечно раздувающийся мультиверс и ПФД, и, более того, есть некоторые экспериментальные свидетельства того, что именно эта лазейка реализована в природе! Забегая вперед, скажем, что этим свидетельством является наличие положительной космологической постоянной, так что если наша гипотеза верна (см. ниже), то именно она *необходима* для примирения вечной инфляции и ПФД. Следовательно, космологическая постоянная оказывается объектом, не разрушающим теорию, как принято считать, а наоборот — необходимым для теории, причем именно космологическая постоянная, а не квинтэссенция (или даже фантом). Здесь и ниже мы будем ссылаться на нашу модель как на «согласованную».

Второе наблюдение звучит так: модели без начала и конца во времени (как, например, статическая модель Эйнштейна) тоже исключаются ПФД. Это будет утверждением 2. Скажем, статическая модель Эйнштейна замкнута (то есть работает утверждение 1), но это условие необходимое, но не достаточное, ибо оба лагранжиана и корня из метрики (проще говорить о таких произведениях как о лагранжевых плотностях) оказываются константами и интеграл по времени дает очевидно расходимость, что нарушает утверждение 2. Вывод, или переформулировка, утверждения 2 звучит так: ПФД верен, если и только если вселенная существует конечное время, то есть должна иметь начало и конец, а это означает наличие уже традиционных сингулярностей. Другими словами, Бэрроу и Типлер буквально утверждают следующее: если вы хотите избежать сингулярностей скалярной кривизны, то вам неизбежно придется платить наличием сингулярностей действия. И наоборот: можно избавиться от расходимости (сингулярности) действия ценой введения сингулярностей на границе пространства-времени (подробнее см.: [10]). Заметим, что сходимость действия только для замкнутых фридмановских космологий с идеальной жидкостью можно полностью исследовать, просто следя за масштабным фактором. Проиллюстрируем это неочевидное утверждение. Оба вклада в действие окрест сингулярности, которая для удобства достигается при $t = 0$ (путем линейного преобразования это всегда можно сделать), пропорциональны t^s, где $s = -1 + 2/\gamma$, а $\gamma = w + 1$ — параметр адиабатичности (мы, конечно, говорим о фридмановских космологиях с идеальной жидкостью и баротропным уравнением состояния). Отличие лишь в числовом множителе: для гравитационного действия он равен $\gamma - 4/3$, а для полей материи не зависит от параметра адиабатичности. При $\gamma = 2$ (предельно жесткое уравнение состояния) возникает другая функциональная зависимость: $\log t$, а $\gamma = 0$ — это или dS, или AdS. Кроме того, окрест сингулярности масштабный фактор, очевидно, $a \sim t^m$ с $m = 2/(3\gamma)$. Величина $s > 0$ при $0 < \gamma < 2$, значит, при $t \to 0$ действие остается конечным при параметре адиабатичности, лежащем в этом интервале (или $-1 < w < 1$). Тем самым полностью исключаются сингулярности в фантомной зоне (на этом мы остановимся подробнее позже) и в области $w > 1$, а это поведение экпиротических космологий, так что эти модели [11] полностью исключаются (в соответствии с [12]) вместе с фантомной сингулярностью типа Big Rip. При $\gamma = 2$ логарифм дает расходимость действия в нуле (кстати, это исключает хаос типа моделей перемешанного мира, поскольку в казнеровском вакууме асимптоты имеют вид $a \sim t^{1/3}$, $m = 1/3$, значит, $\gamma = 2$, а этот случай мы исключили (см. подробности в упомянутых выше двух работах [1; 2])). Таким образом, самые хаотические сингулярности Тауба и БХЛ исключаются ПФД. И, кстати, исключается «точка Омега» в форме Типлера! А вот приближение к нулю масштабного фактора с $w = -1/3$ ($\gamma = 2/3$) дает $s = 2$. То есть ПФД такой вариант «точки Омега» [13] разрешает, но следует помнить, что скалярная кривизна там расходится как $1/t^2$.

Теперь посмотрим, почему исключены плоская и открытая модели. Плоская модель самая простая. Там зависимости $S(t)$ и $a(t)$ определяются простыми степенными функциями с показателями s и m не приближенно, окрест особенности, а точно. Но тогда в плоской космологии условие $s > 0$, гарантирующее сходимость действия в точке сингулярности, гарантирует расходимость при $t \to \infty$. Аналогичная история в открытой космологии. При больших временах в уравнении Фридмана доминирует член с кривизной, который обратно пропорционален квадрату масштабного фактора. Отсюда следует, что при больших временах $a \sim t$, то есть $m = 1$ и $\gamma = 2/3$ (то есть $w = -1/3$). Это, кстати, очевидно из уравнения Раучхаудхури: если масштабный фактор стремится к линейной функции, то вторая производная стремится к нулю, а значит, к нулю стремится комбинация $\rho + 3p$. Следовательно, действие ведет себя как степенная функция с показателем $s = 2$ (это мы знаем) и расходится при $t \to \infty$.

Итак, остается лишь закрытая космология. Еще раз повторим, что это происходит по двум причинам: во-первых, интеграл по пространственным переменным конечен (и действие не расходится из-за этого), во-вторых, такая вселенная расширяется конечное время и потому интеграл по времени сходится.

Бэрроу проанализировал много интересных примеров (и скалярные поля, и анизотропные модели, и sudden сингулярность), но мы отсылаем читателя к его работе и займемся теперь нашей «согласованной» моделью.

3. Инфляция и дополнительность

Как уже отмечалось, выводы, полученные в [1], вступают с противоречие с представлением о вечной инфляциии. В принципе, можно попробовать спасти инфляцию, рассмотрев модель с $\Omega > 1$, что и сделал Линде, опираясь на данные об отсутствии корреляций при низких мультиполях [14]. Общий итог его исследования: такую модель сделать можно, но она будет отличаться от ставших привычными хаотической или новой инфляции двумя принципиальными моментами: однородность и изотропность приходится считать не следствиями инфляции, а следствиями того, что вселенная возникла за счет квантового туннелирования с подавленной вероятностью и приходится подгонять параметры с точностью до 10 %. Нормальная же инфляция, как правило вечная, демонстрирует огромное число е-фолдов, что ведет к бесконечной вселенной (на гиперповерхности внутри пакетной вселенной, вдоль которой инфлатон и (или) поля материи однородны). Таким образом, мы получаем мультиверс как неизбежное следствие инфляции, точнее, два мультиверса: первый и второй по классификации Тегмарка [15]. Но соответствующее действие (даже для мультиверса 1, то есть для одной пакетной вселенной) разойдется, и это произойдет в силу вечного раздувания и не зависит от замкнутости или открытости модели.

В самом деле, возьмем знаменитую модель Виленкина — рождение мультиверса из ничего [16]. Рождается замкнутый пузырь, полный метастабильного вакуума, который раздувается экспоненциально. В нем постоянно возникают фрактальные области, в которых инфляция заканчивается и энергия перекачивается в размерзшиеся флуктуации, что дает вторичный разогрев и рождение 10^{80} элементарных частиц. Эти области расширяются со скоростью света, но разделены инфлюирующим метастабильным вакуумом. Тот факт, что расширение идет вечно (инфляция идет вечно), означает, что эти области *изнутри* бесконечны для своих наблюдателей. Действие расходится при любом способе вычисления. Например, с точки зрения внутреннего наблюдателя его вселенная пространственно бесконечна, даже если в будущем она схлопнется (см.: [17; 18]), значит, действие расходится. А если помыслить «наружного» наблюдателя, то действие разойдется потому, что имеет место dS вечное расширение. Тогда вклад в действие (первый или второй член — неважно) будет определяться интегралом от $a^3 \sim \exp(3Ht)$ ($H = const$) по времени с бесконечным верхним пределом, поэтому он разойдется несмотря на то, что пространственный интеграл сходится (если это не ясно, то, скажем, в гравитационной части стоит скалярная кривизна, а она в dS режиме — константа; аналогично и в полях материи). И, кстати, именно по этой причине принцип финитного действия исключает AdS модели. Там нет реальных сингулярностей на границе пространства-времени (как и для dS), и число осцилляций бесконечно, значит, действие расходится. Ограничиться же одной осцилляцией означает наличие какого-то нового граничного условия, определенного неизвестной нам физикой… В общем, это вопрос к специалистам по теории струн, AdS/CFT соответствию и т.д. Те же, кто предполагает, что геометрия AdS возможна, должны помнить, что там непременно реализуется геометрия открытого мира, так что действие разойдется по пространственным переменным, как мы уже обсуждали выше.

Вернемся к dS, то есть в нашу вселенную. Пока все выглядит неутешительно, но все ли мы учли? Нет, не все. Мы не учли самого важного — космологического горизонта. Его наличие меняет все!

Горизонт требует включения ингредиента Сасскинда — принципа дополнительности (ПД) [19; 20]. Это и хорошо и плохо. Начнем с хорошего. С точки зрения наблюдателя внутри, вселенная заканчивается на горизонте. Пространственный объем вселенной конечен и равен не 40 млрд световых лет (с учетом инфляции), а 13,7 млрд, то есть 10^{28} см. С точки зрения внутреннего наблюдателя, горизонт затянут «квантовым пламенем» толщиной с растянутый горизонт (планковская толщина). Факт наличия горизонта и применение ПД дает сходимость пространственного интеграла при вычислении действия, и это не зависит от того, замкнута ли, открыта ли, плоска ли вселенная — главное, чтобы горизонт был внутри (в замкнутой) или просто «был» в плоской и открытой вселенных. Это хорошая новость. Плохая новость заключается в том, что действие для стационарной (dS расширяющейся) вселенной все равно разойдется по времени. Но это будет не так, если расширение внутри пузыря сменится сжатием.

Естественный вопрос: почему это произойдет, если во вселенной доминирует положительная вакуумная энергия? В ответ мы предлагаем посмотреть на вещи с другой стороны. Как уже отмечалось, если нежелательно иметь расходящееся действие, то надо использовать расходящуюся скалярную кривизну (а также тензор Риччи и Римана). Это более осмысленно, утверждают Бэрроу и Типлер, ведь сингулярности на краю пространства-времени — это просто граница пространства-времени. Наверное, надо не бороться с ними и ожидать, что квантовая гравитация будет теорией, которая «убьет» эти сингулярности, а принять их как факт, как то, что спасает нас от гораздо худшей проблемы — сингулярностей в действии. Это действительно хуже, ибо с расходящимся действием нет никакой надежды построить квантовую гравитацию. Такова точка зрения Бэрроу и Типлера.

Но мы предлагаем задать вопрос иначе: нельзя ли избавиться сразу от двух сингулярностей — и от сингулярности в действии, и от сингулярности на границе пространства-времени? Возможно ли это? Ответ: это возможно в сжимающейся плоской вселенной, заполненной только положительной вакуумной плотностью энергии (то есть dS). Во-первых, в такой вселенной нет «обычной» сингулярности, потому что скалярная кривизна постоянна (мы подчеркиваем это, в общем-то, очевидное обстоятельство, потому что может возникнуть неправильное впечатление о том, что сингулярность просто перенесена на бесконечность, но не устранена. В этом случае не было бы особой разницы с обычными сингулярностями, которые тоже «расположены» на краю пространства-времени. Однако сингулярности в нашей, «согласованной» модели нет вообще. Во-вторых, в такой вселенной масштабный фактор $a \sim \exp(-Ht)$, а значит, гравитационное действие сходится. И действие с полями материи тоже конечно, несмотря на то что мы интегрируем от t_0 до $+\infty$. Но тут немедленно возникает вопрос: горизонт в такой вселенной расположен на бесконечности, то есть его уже нет, а значит, теперь действие опять расходится из-за пространственного интеграла. Выглядит как полное фиаско, но не будем спешить.

Отложим эту проблему до следующего раздела и попробуем рассмотреть предельно общие модели. Мы уже знаем, что если вселенная сжимается асимптотическим образом, то можно одновременно избежать обоих сингулярностей (если забыть про пространственную бесконечность). Экспоненту мы уже рассмотрели, второй вариант — степенное сжатие. Такие модели появлялись в работах Педро Гонзалеза-Диаза и коллег [21; 22] по изучению динамики вселенной после гипотетического Big Trip через взорвавшуюся кротовину, и это не случайно. Очевидно, что это возможно только для фантомов с постоянным (отрицательным) γ, так как если при больших t $a \sim t^{-n}$ с $n = -m > 0$, значит, $\gamma < 0$. Но такие модели исключены, потому что, если они допустимы, то где-то в мультиверсе должен быть домен (на самом деле — бесконечно много доменов), где появляется сингулярность Big Rip, что, как мы уже говорили, исключено ПФД. Несложно показать, почему. Пусть

$$a = C(T - t)^{-n},$$

где T — момент сингулярности большого разрыва, $n > 0$. Скалярная кривизна во фридмановской вселенной определяется формулой

$$R = 6\frac{a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2}. \tag{1}$$

Подставим выражение для a и положим $k=0$, потом умножим на a^3 и проинтегрируем. Это и будет гравитационной частью действия, и мы находим, что она пропорциональна $(T-t)^{-3n-1}$. Таким образом, Big Rip исключается условием ПФД, так как выражение (1) очевидно расходится при $t \to T$.

Для полноты картины рассмотрим асимптотическое сжатие по закону $a \sim t^{-n}$, $n>0$. Очевидно, что скалярная кривизна ведет себя в плоском случае как $1/t^2$, то есть исчезает, что показывает отсутствие сингулярности на бесконечности. Гравитационное действие ведет себя как t^{-1-3n}, то есть тоже сходится, но наличие Big Rip портит всю картину.

Таким образом, вся надежда на оставшуюся «согласованную» модель, в которой отсутствуют обе сингулярности, если решить проблему расходимости пространственного интеграла. Разумеется, можно исследовать другие модели, например вида $\exp(-t^2)$, которую мы уже рассматривали ранее [23], но надо четко понимать, что нет никаких физических причин это делать.

4. Сжимающаяся dS вселенная и инстантонное туннелирование

Теперь обратимся к проблеме горизонта. Не исчезает ли горизонт при сжатии? Содержательный ответ на этот вопрос зависит от того, что является (точнее, будет являться, а еще точнее — сможет являться) причиной того, что расширение сменится сжатием. Первый вариант ответа: механизм Виленкина — Гарриги, при котором скалярное поле медленно ползет вниз. Соответственно, величина эффективной космологической постоянной уменьшается, обнуляется, становится отрицательной и начинается безудержный коллапс. Кстати, тут надо иметь в виду следующее: это не означает, что инфляция не вечна и что вселенная не бесконечна, хотя на первый взгляд кажется, что это именно так: мы ведь знаем, что именно вечная инфляция дает удивительный эффект пространственной бесконечности «карманной» вселенной для наблюдателя изнутри — бесконечное время расширения для «внешнего» наблюдателя оказывается бесконечным пространством для внутреннего. А если она схлопывается, значит ли это, что существует лишь конечное время для внешнего? Нет, не значит. Тут тот же эффект, как с распадом метастабильного вакуума на картинках Грина: рисуем гиперболу (или другую пространственно подобную гиперповерхность постоянного времени) и аппроксимируем динамику клеточным автоматом. На первом шаге закрашиваем квадратик над гиперболой по центру черным — это область, где началось сжатие. На втором шаге сдвигаемся на клетку вверх и закрашиваем два квадрата по бокам от черного черным, центральный еще чернее. На шаг вверх — еще два черных по краям, два черных на предыдущем становятся двумя еще более черными, а центральный — самым черным. Гиперповерхности проводится через квадратики постоянного цвета. Чтобы не путаться с цветами, можно использовать цифры: одна клетка с номером 1, все остальные с нулями. Над ней уже три ненулевые клетки: центральная с номером 2 и по краям две с номером 1, остальные нули. Выше — уже пять ненулевых: центральная с номером 3, ее соседи — две с номерами 2, и две замыкают с номерами 1. Потом выше уже 7, и т.д. Положим, что коллапс происходит в клетках с номерами, равными 100. Тогда в этом месте мы останавливаемся, но число клеток с номерами меньше 100 окажется бесконечным и все клетки с номером $N<100$ образуют бесконечное пространство с часами, показывающими N. Просто число таких бесконечных гиперповерхностей будет N (стартуя с нулевой). Мы рекомендуем читателю выполнить эти простые действия на листочке в клеточку и убедиться в справедливости нашего утверждения.

Следует четко понимать, как все происходит. Мы говорили о клеточных автоматах, но это может сбить с толку и создать неправильное ощущение, что клетки с одинаковыми цифрами, последовательно генерируют свое потомство. Это совершенно не так! Мы использовали автоматы только для того, чтобы сделать очевидным алгоритм. На самом деле механизм Виленкина — Гарриги — это вовсе не последовательность причинно связанных областей, где расширение сменяется сжатием, вовсе не история, где клетки порождают новые. На самом деле эти клетки *причинно не связаны друг с другом вообще*. Тут полная аналогия с границей пакетных вселенных, которая постоянно наступает на инфлюирующее море и представляет собой постоянно идущие Большие взрывы. Но эти взрывы причинно не связаны и расположены на пространственно подобных гиперповерхностях. Наши клетки с одинаковыми номерами лежат тоже на пространственно подобных поверхностях, а не на изотропных, как может показаться, впечатление же слаженности всей динамики связано только с тем, что имеется глобальное скалярное поле с определенным рисунком, которое очень медленно меняется в пространстве и потому как бы «ведет за собой в танце» разные клетки в кажущемся общем ритме — ритме, который и создает впечатление, что эти клетки причинно связаны друг с другом, коли так слаженно танцуют. Но это, повторим, иллюзия.

К сожалению, такой механизм смены расширения сжатием нам не подходит, потому что, как только космологическая постоянная становится нулевой, спасительный горизонт исчезает. Исчезновение горизонта кажется абсолютным нарушением релятивистской физики, но это не так: переход к фазе сжатия не носит последовательный, причинный характер, поскольку происходит на пространственно подобных гиперповерхностях. Еще раз вообразите наш клеточный рисунок: для наблюдателя, находящегося в одной из клеток, отвечающих коллапсу, уже нет горизонта, ибо горизонт связан с ускорением, а для такого наблюдателя все гиперповерхности, на которых лежат клеточки с цифрой «нуль», лежат в прошлом. Значит, вселенная уже пространственно бесконечна с точки зрения внутреннего наблюдателя, то есть *спрятаться за спасительным ПД уже нельзя* и действие неизбежно расходится, нарушая ПФД.

Нам нужен другой процесс, при котором с точки зрения внутреннего наблюдателя образуется конечный пузырь «новой фазы», в котором имеет место сжатие, а стенки пузыря новой фазы расширяются со скоростью света внутри dS объема. Пузырь этот очень быстро заполняет почти весь dS объем, но никогда не может догнать горизонт, а значит, горизонт существует все время, надежно укрывая коллапсирующую вселенную от окружения, и пространственная область остается конечной. Значит, мы имеем то, что искали: схлопывающийся dS пузырь, но конечный, ибо он весь вечно окружен dS горизонтом.

Мы сейчас не обсуждаем механизм образования такого пузыря. Мы говорим о более общих вещах, а именно: если такой механизм существует, приводит ли он к требуемой картине, в которой отсутствуют и сингулярности кривизны, и сингулярности действия? Если немного поразмыслить, становится ясно, что есть одно возражение: квантовые переходы. Дело в том, что наша модель должна существовать вечно, в противном случае она трансформируется в какую-то другую, но выше мы уже привели аргументы в пользу того, что любая другая модель или не будет физически согласованной, или будет допускать какой-либо из двух типов сингулярностей. С другой стороны, в теории струн (и вообще в теории поля) существует ненулевая вероятность инстантонного туннелирования [24] вселенной. Если вселенная существует вечно, то такое туннелирование произойдет с вероятностью, равной единице, но оказывается, что нас опять выручает горизонт.

Для оценки мы будем использовать подход, анонсированный в [25]. Пусть A — скорость на единицу 4-объема для нуклеации пузырька новой фазы, который начинает распространяться со скоростью света, уничтожая на своем пути все в рамках причинного будущего конуса события — нуклеации пузырька. Это описание процесса распада старого вакуума. Дон Пейдж вводит величину $P(p)=\exp(-AV_4(p))$, где $V_4(p)$ — 4-объем светового конуса прошлого события p в фоновом пространстве-времени. Соответственно, $P(p)$ — вероятность того, что пространство-время сохранится, не распадется в событии p. А вся по-настоящему сложная физика «сидит» в численном значении A. Вот теперь ясно, как избежать «черного лебедя» квантового распада. Имеют место две области: I — область между границей пузыря и горизонтом и II — область схлопывающего dS пространства внутри пузыря. Рассмотрим их по отдельности.

Мы рассмотрим область большую, чем дает формула Пейджа, — всю область I. Пусть пузырек возник при $t=0$, в центре dS области с параметром Хаббла H, то есть при $r=0$, и начал распространяться со скоростью света. Интегрируя изотропный радиальный кусок интервала с этими граничными условиями, получаем, что в момент времени t координата границы пузырька новой фазы равна $r=(1-\exp(-Ht))/H$. Физическое расстояние получается умножением этой величины на масштабный фактор в момент времени «нуль» (все описание идет с точки зрения наблюдателя, созерцающего появление пузыря), то есть

$a(0)=\exp(0)=1$. Значит, в момент времени t в плоской метрике трехмерный объем области I $V_3(t)=4\pi(H^{-3}-r(t)^3)/3$. Теперь проинтегрируем его от t до бесконечности и получаем

$$V_4(t)=(4/9)\exp(-Ht)\pi(\exp(-2Ht)-(9/2)\exp(-Ht)+9)/H^4.$$

Таким образом, при больших t главный вклад дается членом e^{-Ht} (остальные более высокие степени исчезают быстрее), значит, для всей области I (для всех ее точек) вероятность уцелеть

$$P_I(t)=\exp(-\frac{4\pi A}{H^4}e^{-Ht}),$$

то есть стремится к единице как экспонента в степени экспоненты на больших временах. Вероятность квантового перехода не пренебрежима лишь на больших временах, но именно на них вероятность уцелеть оказывается, по сути, единицей (1 – 1/гугл). Происходит это чудо потому, что $V_4(t)\to 0$ «дважды экспоненциально» при росте t в области *I*. Так что в области I Черный лебедь улетел!

А область *II*? Но там происходит асимптотическое сжатие! Масштабный фактор $a=\exp(-Ht)$, значит, 4-объем области *II* от t до бесконечности равен $(1/3)\exp(-3Ht)/H$ и после подстановки в формулу Пейджа дает тот же эффект, что и область *I*! Таким образом, мы получаем третье замечательное свойство (первые два — отсутствие сингулярностей в кривизне и в действии) «согласованной» модели: она вечна и устойчива к фазовым переходам между вакуумами. По крайней мере, в нулевом приближении нашего понимания квантово-гравитационных эффектов, являющегося чисто зачаточным.

5. Обсуждение

Тут возникает драматический вопрос о том, что заставит возникнуть пузырь такой сложной, неестественной конфигурации? Это второй по сложности вопрос (после вопроса о том, что за физика происходит, когда пузырь, раздуваясь, попадает в область растянутого горизонта, в квантовую пену?), однако он вовсе не из тех, на которые нет никакого ответа. Ответов даже несколько, но все они неприятно неопределенны. Например, нельзя исключать фазовые переходы за счет квантового туннелирования, но характерные времена таких процессов очень велики — гораздо больше, чем время, за которое механизм Виленкина — Гарриги приведет вселенную к коллапсу (порядка триллиона лет), который, как мы знаем, не подходит. Отсюда вывод: нам нужен фазовый переход за время порядка 10 гигалет или меньше. Но что может к нему привести? Вот две мысли. Во-первых, «уничтожение» вселенной пузырем новой фазы было вычислено Пейджем в уже процитированной выше работе для избавления от больцмановских мозгов. У него вышли оценки порядка 19 гигалет, но ему так и не удалось найти адекватный механизм: использование и распада в суперсимметричных теориях, и гипотезы о механизмах, ассоциированных с хиггсовскими полями, требовало тонких подстроек на уровне не менее 0,001 (то есть 0,1 %), что сомнительно. Однако есть интересные работы (см., например, [26]), связывающие возможную нестабильность вакуума с хиггсовскими полями более правдоподобным образом. Это первое направление.

Вторая мысль связана с переходом к сжатию после прохождения сингулярности второго типа по классификации N. O. T. [27], так называемой Sudden future singularity, открытой Бэрроу [28], которая исследовалась в [29], где авторы пришли к удивительному выводу о том, что нас отделяет от нее от 1 млн до 10 млн лет! Есть и другой вариант, описанный в нашей работе [18], где мы изучили возможность генерации sudden сингулярности ползущим вниз инфлатоном.

Казалось бы, мы отказались от рассмотрения инфлатона как источника смены режима расширения на режим сжатия. Но это не совсем так: мы действительно отказались от использования эффекта медленно ползущего инфлатона, но появление особенностей типа Sudden — совсем другая история, и мы предполагаем, что эта история должна выглядеть именно так, как надо: не глобальное сползание и медленное убывание космологической постоянной на огромных масштабах (много больших горизонта), а возникновение небольшого пузыря внутри хаббловского объема. Дело в том, что релятивистские уравнения означают, что масштабы временные и пространственные — это одно и то же (особенно в естественной системе единиц). Скажем, сползание инфлатона, вычисленное Виленкиным и Гарригой, имеет временной масштаб, равный 1 трлн лет (то есть 1000 гигалет), следовательно, пространственный масштаб изменений будет примерно таким же. Само поле разглажено инфляцией на гораздо больших масштабах, но — и это интересно — для нас вполне достаточно триллиона световых лет, ибо весь наш объем внутри горизонта составляет 1 % от этого масштаба! А вот sudden характеризуется другими временами, гораздо меньшими, чем 10 гигалет, значит, и пространственные неоднородности, соответствующие таким временным масштабам, должны быть меньше хаббловского объема. У Дабровски с соавторами это миллион световых лет, то есть пузырек размером с расстояние между Млечным Путем и M31 (туманностью Андромеды), а у нас оценка дала 10 гигалет, то есть наш хаббловский объем, что, в принципе, тоже подойдет, но надо помнить, что это абсолютно качественная и грубая (хотя и очень остроумная) оценка. Детальное исследование может уменьшить ее на порядки.

Разумеется, нам надо быть уверенными, что sudden не даст сингулярностей, с которыми мы боремся. Бэрроу рассмотрел sudden особенность на предмет соответствия ПФД. Хотя вопрос требует тщательного изучения, практически очевидно, что там нет тех сингулярностей, которые исключены «согласованной» моделью. Действительно, в нашей модели вторая производная от масштабного фактора, деленная на масштабный фактор, пропорциональна дельта-функции (см.: [18]), поэтому скалярная кривизна на один момент становится бесконечной, но это

мягкая расходимость, через которую можно продолжить геодезическую, как хорошо известно благодаря целому пулу строгих математических результатов в этой области (см., например, [30; 31]). А действие остается конечным, потому что нам надо умножить, по сути, эту дельта-функцию на куб масштабного фактора (гладкий и непрерывный) и проинтегрировать, что, очевидно, даст просто куб a в этой точке. Остальные слагаемые в гауссовой кривизне гладкие, без разрывов. Правда, в нашей статье возникает сингулярность при сжатии, поскольку мы использовали Λ CDM модель с $a \sim (\sinh t)^{2/3}$. Чтобы этого не происходило, можно использовать дополнительное условие, суть которого звучит так: если при сжатии вся темная материя и барионы преобразуются в безмассовую радиацию, то плотность полей материи должна быть равна в точности «квантовому потенциалу», введенному в работе [32]. Тогда эти вклады в точности уничтожаются и остается одна экспонента e^{-Ht}, ведущая вселенную так, как предписывает «согласованная» модель.

Мы отдаем себе отчет, что это совпадение может показаться надуманным, но предлагаем смотреть на это так: условие совпадения и только оно гарантирует, что отсутствуют оба типа сингулярностей. Если считать, что сингулярности суть сигнал разрушения теории, то такое условие должно непременно быть ингредиентом теории (как число поколений кварков должно совпадать с числом поколений лептонов стандартной модели), как размерность 10 оказывается критической в теории струн из условия согласования. Таким образом, можно рискнуть и сделать предсказание: в единой теории (например, в М-теории) должно оказаться, что (1) согласованной модель будет только при совпадении плотности полей материи и «квантового потенциала» и (2) единая теория требует обязательного наличия sudden future singularity (то есть вакуумного фазового перехода в интервале 10—20 гигалет, меняющего знак постоянной Хаббла).

6. Заключение

Описанная в этой статье модель — не более чем направление мысли, основанное на предположении о том, что полная теория должна быть свободна от обоих типов сингулярности. Вероятно, можно предложить и другие модели с тем же свойством, но представляется, что их набор будет весьма ограниченным, и это делает такие спекулятивные исследования интересными: специальные модели, как правило, предсказывают весьма специфические наблюдательные эффекты. Мы же в заключение хотим показать, что «согласованная» модель, возможно, способна пролить свет на центральную проблему dS космологии: как примирить ПД Сасскинда с голографическим принципом? Если число бит во вселенной не превосходит площади горизонта в планковских единицах, то как может быть такое описание дополнительно к внешнему мультиверсу? Мультиверс содержит бесконечно много информации. Значит, описание «вне» (даже воображаемое) никак не может быть эквивалентно описанию «внутри». Но ПД требует именно этого: есть два способа описать физику, которые нельзя применять одновременно — либо первый, либо второй. Но это два способа описания одной и той же физики в определенном смысле — два эквивалентных описания. Однако абсолютно очевидно, что описания, содержащие объекты с бесконечно большой информацией (или энтропией), и описания, содержащие лишь объекты с конечной информацией, никак не могут быть эквивалентными, то есть дополнительными!

Таким образом, не исключено, что «согласованная» модель не страдает от этой головоломки, поскольку, как можно показать, в ней выполнены два условия: (1) геодезические беконечны, (2) свободная энергия расходится, а значит, в ней перерабатывается бесконечно много бит. Другими словами, ответ на загадку удивительно прост: в нашей модели в одной вселенной содержится бесконечно много информации, так что она эквивалентна в этом смысле всему мультиверсу. Поэтому дополнительность Сасскинда применительно к космологическим горизонтам работает. Кроме того, здесь четко определена стрела времени и неограниченный рост энтропии. Впрочем, это уже другая история.

Список литературы

1. *Barrow J.D., Tipler F.J.* Action principles in nature // Nature. 1988. №331. P. 31—34.

2. *Barrow J.D.* Finite Action Principle Revisited // Phys. Rev. 2020. Vol. D 101. Art. №023527. arXiv:1912.12926 [gr-qc].

3. *Davey A., Stewartson K.* On three dimensional packets of surface waves // Proc. R. Soc. A. 1974. №338. P. 101—110.

4. *Omote M.* Infinite-dimensional symmetry algebras and an infinite number of conserved quantities of the (2+1)-dimensional Davey-Stewartson equation // J. Math. Phys. 1988. 29. Art. №2599.

5. *Boiti M., Leon J.J.-P., Martina L., Pempinelli F.* Scattering of localized solitons in the plane // Physics Letters A. 1988. Vol. 132, iss. 8—9. P. 432—439.

6. *Leble S., Salle M., Yurov A.* Darboux Transforms of Davey-Stewartson Type Equations and Solitons in Multidimensions // Inverse Problems. 1992. №8. P. 207—218.

7. *Юров А.В.* Сопряженные цепочки дискретных симметрий (1+2) нелинейных уравнений // ТМФ. 1999. №119 (3). С. 419—428.

8. *Yurov A.V.* BLP dissipative structures in plane// Physics Letters. 1999. №A262. P. 445—452.

9. *Гарагаш И.* О модификации теста Пенлеве для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных // ТМФ. 1994. №100 (3). С. 367—376.

10. *Хокинг С., Эллис Дж.* Крупномасштабная структура пространства-времени. М., 1977.

11. *Khoury J., Ovrut B.A., Steinhardt P.J., Turok N.* The Ekpyrotic Universe: Colliding Branes and the Origin of the Hot Big Bang // Phys. Rev. 2001. №D 64. Art. №123522.

12. *Kallosh R., Kofman L., Linde A.* Pyrotechnic Universe // Phys. Rev. 2001. №D 64. Art. №123523.

13. *Tipler F.J., Graber J., McGinley M. et al.* Closed Universes With Black Holes But No Event Horizons As a Solution to the Black Hole Information Problem // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 2007. №379. P. 629—640.

14. *Linde A.* Can we have inflation with Omega > 1? // JCAP. 2003. №0305. Art. №002.
15. *Tegmark M.* The Multiverse Hierarchy // Universe or Multiverse? / ed. by B. Carr. Cambridge University Press, 2007.
16. *Vilenkin A.* Creation of universes from nothing // Physics Letters B. 1982. Vol. 117, iss. 1—2. P. 25—28.
17. *Garriga J., Vilenkin A.* Testable anthropic predictions for dark energy // Phys. Rev. 2003. №D 67. Art. №043503.
18. *Yurova A.A., Yurov A.V., Yurov V.A.* What can the anthropic principle tell us about the future of the dark energy universe? // Gravitation and Cosmology. 2019. Vol. 25, iss. 4.
19. *Susskind L.* String Theory and the Principle of Black Hole Complementarity // Phys. Rev. Lett. 1993. №71. P. 2367—2368.
20. *Susskind L.* Black Hole Complementarity and the Harlow-Hayden Conjecture. arXiv:1301.4505.
21. *Gonzalez-Diaz P.F.* Achronal cosmic future // Phys. Rev. Lett. 2004. №93. Art. №071301.
22. *Yurov A.V., Moruno P.M., Gonzalez-Diaz P.F.* New “Bigs” in cosmology // Nucl. Phys. 2006. №B759. P. 320—341.
23. *Yurov A.V., Astashenok A.V., Elizalde E.* The cosmological constant as an eigenvalue of a Sturm-Liouville problem // Astrophysics and Space Science. 2012. №349 (1).
24. *Coleman S., De Luccia F.* Gravitational effects on and of vacuum decay // Phys. Rev. 1980. №D 21. P. 3305.
25. *Page D.N.* Is Our Universe Decaying at an Astronomical Rate? // Phys. Lett. 2008. №B669. P. 197—200. arXiv:hep-th/0612137.
26. *Boddy K.K., Carroll S.M.* Can the Higgs Boson Save Us From the Menace of the Boltzmann Brains? 2013. arXiv:1308.4686.
27. *Nojiri S., Odintsov S.D., Tsujikawa S.* Properties of singularities in (phantom) dark energy universe // Phys. Rev. 2005. Vol. D 71. Art. №063004.
28. *Barrow J.D.* Sudden future singularities // Class. Quantum Grav. 2004. №21. P. L79—L82.
29. *Dabrowski M.P., Denkiewicz T., Hendry M.A.* How far is it to a sudden future singularity of pressure? // Phys. Rev. 2007. №D 75. P. 123524.
30. *Fernandez-Jambrina L., Lazkoz R.* Geodesic behavior of sudden future singularities // Phys. Rev. 2004. №D 70. P. 121503.
31. *Fernandez-Jambrina L., Lazkoz R.* Geodesic completeness around sudden singularities // AIP Conf. Proc. 2006. №841. P. 420.
32. *Yurov A., Yurov V.* The Day the Universes Interacted: Quantum Cosmology without a Wave function // Eur. Phys. J. C. 2019. №79. P. 771.

Об авторах

Алла Александровна Юрова — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта; Калининградский государственный технический университет, Россия.
E-mail: AIUrova@kantiana.ru

Валериан Артемович Юров — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.
E-mail: vayt37@gmail.ru

Артем Валерианович Юров — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.
E-mail: AIUrov@kantiana.ru

The authors

Dr Alla A. Yurova, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University; State Tehnical University, Russia.
E-mail: AIUrova@kantiana.ru

Dr Valerian A. Yurov, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.
E-mail: vayt37@gmail.ru

Prof. Artyom V. Yurov, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.
E-mail: AIUrov@kantiana.ru