УДК 514.75

В.С. Малаховский

(Калининградский государственный университет)

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ БАЗОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПИФАГОРОВЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Рассмотрены две бесконечные последовательности пифагоровых треугольников с простыми катетами и простыми гипотенузами (базовые последовательности первого и второго рода). Доказано, что произведение четного катета на гипотенузу каждого пифагорова треугольника первой последовательности кратно 60. Один из катетов произвольного пифагорова треугольника второй последовательности кратен 5, а один из его катетов (тот же самый, либо другой) кратен 3. Площадь каждого такого треугольника кратна 30.

Пифагоров треугольник – это прямоугольный треугольник, длины всех сторон которого – натуральные числа. Такие треугольники определяются диофантовыми тройками натуральных чисел [1, с. 59]:

$$(2mn,\ n^2–m^2,\ n^2+m^2),\ n,m\in N\wedge n>m. \tag{1}$$

Число 2mn назовем четным катетом, число n^2-m^2 – нечетным катетом, а число n^2+m^2 – гипотенузой пифагорова треугольника.

Пусть p – произвольное простое число, большее 5. Из условия p=n^2–m^2 следует: $n=\frac{1}{2}(p+1)$, $m=\frac{1}{2}(p-1)$. Следовательно, существует единственный пифагоров треугольник с простым катетом p: $\{\frac{1}{2}(p^2+1)$, p, $\frac{1}{2}(p^2-1)\}$. Назовем бесконечную последовательность таких пифагоровых треугольников

$$(24, 7, 25); (60 ,11 ,61); (84, 13, 85); (144 ,17 ,145); (180 ,19 ,181);\dots \tag{2}$$

базовой последовательностью первого рода.

Эйлер доказал, что всякое простое число p=4k+5 (k$\in$N) единственным образом разлагается на сумму квадратов натуральных чисел и, значит, определяет однозначно пифагоров треугольник с гипотенузой p=n^2+m^2. Бесконечную последовательность таких пифагоровых треугольников

$$(12, 5, 13); (8, 15, 17); (20, 21, 29); (12, 35, 37); (40, 9, 41); ... \tag{3}$$

назовем базовой последовательностью второго рода (см. [2, с. 70]).

Простое число p=4k+3 не разлагается на сумму квадратов натуральных чисел. Следовательно, не существует пифагоровых треугольников с такой гипотенузой p.

Так как в любом базовом пифагоровом треугольнике (1) первого или второго рода числа n и m разной четности, то его четный катет кратен 4.

Теорема 1. *Четный катет базового пифагорова треугольника первого рода кратен 12, а его произведение на гипотенузу кратно 60.*

Доказательство. Произвольное простое число $p>5$ имеет вид: $6k+1 \vee 6k+5$ $(k \in N)$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}(p^2-1) = 6k(3k+1) \vee 6k(3k+5)+12. \qquad (4)$$

Так как числа $k(3k+1)$ и $k(3k+5)$ – четные, то четный катет $\frac{1}{2}(p^2-1)$ кратен 12.

Далее, полагая $p=5k+h$ $(k \in N,\ h=1,2,3,4)$, находим:

$$\frac{1}{4}(p^2-1) = \frac{1}{4}(5(125k^4+100k^3h+30k^2h^2+4kh^3)+h^4-1) \in N. \qquad (5)$$

Так как при любом $h \in \{1,2,3,4\}$ число h^4-1 кратно 5, то произведение четного катета на гипотенузу кратно 60.

Следствие 1. Пусть p – произвольное простое число, оканчивающееся на 1 или на 9, т.е. $p=10n+1 \vee p=10n+9$ $(n \in N)$. Тогда натуральное число p^2-1 кратно 120.

Следствие 2. Для любого простого числа $p>5$ натуральное число p^4–1 кратно 240.

Теорема 2. *Один из катетов базового пифагорова треугольника второго рода с гипотенузой p>5 кратен пяти, а один из катетов (тот же самый, либо другой) кратен трем.*

Доказательство. Положим $n=5s+h_1$, $m=5t+h_2$ $(s,t \in N,\ h_1,h_2=0, 1, 2, 3, 4)$. Так как число $p=n^2+m^2$ – простое, то $h_1^2+h_2^2 \neq 5k$ $(k \in N)$. Имеем: $2mn = 5(5st+h_1t+h_2s)+h_1h_2$, $n^2-m^2 = 5(5(s^2-t^2)+2(sh_1-th_2))+h_1^2-h_2^2$.

Для любой пары (h_1,h_2), удовлетворяющей неравенству $h_1^2+h_2^2 \neq 5k$, одно из чисел h_1,h_2 и $h_1^2-h_2^2$ кратно 5. Аналогично устанавливается кратность одного из катетов трем.

Следствие. При $p>5$ площадь любого базового треугольника второго рода кратна 30 (так как произведение его катетов кратно 4*3*5=60).

Теорема 3. *В любом пифагоровом треугольнике (1) одна из сторон кратна пяти, а одна из сторон (та же самая, либо другая) кратна трем.*

Доказательство. Положим $n=5s+h_1$ $(3s+h_1)$, $m=5t+h_2$ $(3t+h_1)$, где $s,t \in N_0=N \cup 0$, $h_1,h_2=0, 1, 2, 3, 4$ (0, 1, 2). Имеем: $2mn=5q+2h_1h_2$ $(3q+2h_1h_2)$,

$$n^2-m^2 = 5u+h_1^2-h_2^2\ (3u+h_1^2-h_2^2),\ n^2+m^2 = 5v+h_1^2+h_2^2\ (3v+h_1^2-h_2^2),$$

где $u,v \in N_0$. При любом выборе h_1,h_2 в соответствующих подмножествах одно из трех чисел $2h_1h_2$, $h_1^2-h_2^2$, $h_1^2+h_2^2$ кратно 5, а одно из этих чисел кратно 3.

Список литературы

1. *Оре О.* Приглашение в теорию чисел. М., 1980.

2. *Малаховский В.С.* Диофантовы семейства пифагоровых треугольников // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2001. № 32. С. 69 – 73.

V. Malakhovsky

ON SAME PROPERTIES OF BASE SEQUENCES
OF PIFAGOR`S TRIANGLES

We consider two infinite sequences of Pifagor`s triangles with prime cathetuses and prime hypotenuse (base sequences of the 1-st and 2-nd kind). It is proved, that even cathetus of the each Pifagor`s triangle out of the first sequence is divisible by 12 or 60, and hypotenuse is divisible by 5. One of cathetuses for arbitrary Pifagor`s triangle out of the second sequence is divisible by 5, and one of its cathetuses (the same or the other) is divisible by 3. Area of each such triangles is divisible by 30.

УДК 514.75

W.S. Malachowskij

(Staatliche Universität zu Kaliningrad)

ANWENDUNGEN CARTAN's METHODE ZU DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

(Ein Vortrag, der Autor an der Universität München in November 1995 gelesen hat)

Dieser Artikel ist einen kurzen Bericht über den Anwendungen von der Cartan's Methode zu den Pfaff's Systemen der Differentialgleichungen – voll integrabille und nicht voll integrabille. Einige konkrete Beispielen mit Lösung in Quadraturen dieser Systemen sind betrachtet. Die Reduzierung der Verändlichen in Pfaff's System mit Lösung eines Beispiels ist auch gezeigt.

1. Einfürung in der Cartan's Methoden. Es sei V – die Menge aller analytischen Funktionen von n Verändlichen $x^1, x^2, \ldots, x^n$:

$$V=\{f(x^1, x^2, \ldots, x^n)\,|\,x^i\in\mathrm{R}\} \tag{1.1}$$

Die antikommutative, sogenante *äußere*, Multiplikation „$\wedge$" in der Menge der Differentialen dx^i ($i=\overline{1,n}$) ist auf folgende Weise definiert:

1) wenn die Zahlen $i_1, i_2, \ldots, i_p$ sind paarweise verschieden und $j_1, j_2, \ldots, j_p$ sind dieselbe Zahlen mit $j_1<j_2<\ldots j_p$, dann

$$dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}=\begin{cases} dx^{j_1}\wedge dx^{j_2}\wedge\ldots\wedge dx^{j_p}, \text{wenn} \begin{pmatrix} i_1\ldots i_p \\ j_1\ldots j_p\end{pmatrix} \text{gerade ist,} \\ -dx^{j_1}\wedge dx^{j_2}\wedge\ldots\wedge dx^{j_p}, \text{wenn} \begin{pmatrix} i_1\ldots i_p \\ j_1\ldots j_p\end{pmatrix} \text{ungerade ist.}\end{cases}$$

2) wenn mindestens zwei Zahlen von $i_1, i_2, \ldots, i_p$ gleich sind, dann $dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}=0$.