$$dB_0 = d(A_0 \wedge A_1) = dA_0 \wedge A_1 + A_0 \wedge dA_1 =$$
$$= (\omega_0^0 + \omega_1^1) B_0 + \omega_1^2 B_1 + \omega_1^3 B_2 - \omega_0^2 B_3 + \omega_0^3 B_4 .$$

Dies bedeutet, daβ die Hyperebene Spann(B_0, B_1, B_2, B_3, B_4) den Tangentiellen Raum der Plücker'schen Quadrik Q_4^2 im Punkt B_0 darstellt. Daraus folgt auch, daβ die formen ω_1^2, ω_1^3, ω_0^2, ω_0^3 in jedem punkt $l \in M$ linear unabhängig sind und eine Basis des kotangentiellen Raumes $T_l^* M$ der Grassmann'schen Mannigfaltigkeit M bilden. Das beendet den Beweis des Lemmas. Aus Diesem Lemma folgt, daβ jede beliebige Regelfläche mit Hilfe von einem Differentialsystem $\frac{\Omega^1}{\lambda^1} = \frac{\Omega^2}{\lambda^2} = \frac{\Omega^3}{\lambda^3} = \frac{\Omega^4}{\lambda^4}$, oder, kurz geschrieben, mit Hilfe vom System

$$\Omega^i = \theta\lambda^i, \quad (i=1,2,3,4) \qquad (2.4)$$

als eine Integralkurve einer 1-dimensionalen Distribution auf M bestimmt werden kann, wo λ^i glatte Funktionen auf M sind und θ eine glatte differentielle 1-Form auf M ist.

Literatur

1. *Kaiser V. V.* Spezielle Distributionen auf Grassmann'scher Mannigfaltigkeit (I) // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1997. Вып. 28. С. 38-47.

2. *Spivak M.* A comprechensive introduction to differential geometry. Boston, 1970. Vol.1.

В.В. Кайзер

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ГРАССМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ(II)

Описан аналитический аппарат, позволивший получить результаты, сформулированные в первой части работы [1].

УДК 514.75

О КОНФОРМНОМ СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ ОБЛАСТЯМИ ЕВКЛИДОВА И РИМАНОВА ПРОСТРАНСТВ

Г.В. К у з н е ц о в

(Тульский государственный педагогический университет)

Пусть E^n евклидово n – мерное пространство и V^n – n – мерное риманово пространство и f: $\Omega\to\overline{\Omega}$ - точечное невырожденное дифференцируемое отображение области Ω пространства E^n в область $\overline{\Omega}$ пространства V^n , так что для точки $x\in\Omega$ имеем $y=f(x)\in\overline{\Omega}$. Присоединим к точке x множество всех аффинных реперов $\{x, \bar{e}_i\}(i,j=1,...,n)$ с началом в этой точке. Положим $\bar{a}_i = f^*_x(\bar{e}_i)$, где f^*_x – касательное линейное отображение к отображению f в точке x. Так как f^*_x – невырожденное отображение, то вектора $\bar{a}_i$ независимы и образуют репер в касательном пространстве к V^n.

Уравнения перемещения реперов $\{x,\bar{e}_i\}$ и $\{y,\bar{a}_i\}$ запишем в виде

$$d\bar{x}=\omega^i\bar{e}_i,\ d\bar{e}_i=\omega^j{}_i\bar{e}_i,\ d\bar{y}=\varpi^i\bar{a}_i,\ d\bar{a}_i=\varpi^j{}_i\bar{a}_i+\varpi^j\bar{a}_{ij}, \tag{1}$$

где $\bar{a}_i$ – векторы, образующие с $\bar{a}_i$ репер второго порядка, связанный с точкой y [1]. Дифференциальные формы ω^i и $\omega^j{}_i$, входящие в эти уравнения, удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства

$$D\omega^i = \omega^j\wedge\omega^i{}_j,\ D\omega^i{}_j = \omega^k{}_j\wedge\omega^i{}_k\ . \tag{2}$$

В свою очередь, дифференциальные формы ϖ^i и $\varpi^j{}_i$ удовлетворяют уравнениям структуры риманова пространства

$$D\varpi^i = \varpi^j\wedge\varpi^i{}_j\ ,\ D\varpi^i{}_j = \varpi^k{}_j\wedge\varpi^i{}_k + 1/2\,\overline{R}^i{}_{jkl}\varpi^k\wedge\varpi^l\ , \tag{3}$$

где $\overline{R}^i{}_{jkl}$ – тензор кривизны риманова пространства V^n.

Обозначим через g_{ij} и $\bar{g}_{ij}$ метрические тензоры пространств E^n и V^n в точках x и y соответственно. В силу (1) элементы длины в этих пространствах записываются в виде

$$ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j,\ d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}\,\varpi^i\varpi^j\ . \tag{4}$$

Тензоры g_{ij} и $\bar{g}_{ij}$, в силу (1), удовлетворяют уравнениям

$$dg_{ij}= g_{ik}\omega^k{}_j+ g_{kj}\omega^k{}_i,\ d\bar{g}_{ij}= \bar{g}_{ik}\,\varpi^k{}_j + \bar{g}_{kj}\varpi^k{}_i+ \bar{g}_{ijk}\varpi^k\ . \tag{5}$$

В силу согласованного выбора реперов в пространствах E^n и V^n 1-формы ω^i и ϖ^i, определяющие перемещение точек x и y , связаны равенствами :

$$\varpi^i = \omega^i\ . \tag{6}$$

Эти равенства представляют собой основные дифференциальные уравнения рассматриваемого соответствия f. Дифференцируя их внешним образом и применяя лемму Картана, получим

$$\varpi^i{}_j - \omega^i{}_j = h^i{}_{jk}\omega^k, \tag{7}$$

где $h^i{}_{jk} = h^i{}_{kj}$.

Пусть отображение f :$\Omega\to\overline{\Omega}$ - является конформным. Тогда $d\bar{s}^2= \lambda^2ds^2$, где λ - коэффициент конформности, зависящий от точки $\lambda=\lambda(x)$. Положим $\lambda=e^\alpha$. Ввиду этого

$$\bar{g}_{ij}=e^{2\alpha}g_{ij}\ . \tag{8}$$

Дифференцируя последнее соотношение с помощью формул (5), получим

$$e^{2\alpha}g_{ik}(\varpi^k{}_j-\omega^k{}_j)+e^{2\alpha}g_{kj}(\varpi^k{}_i-\omega^k{}_i)+\bar{g}_{ijk}\varpi^k = 2e^{2\alpha}g_{ij}d\alpha.$$

Так как $\alpha=\alpha(x)$, то

$$d\alpha = \alpha_i\omega^i . \qquad (9)$$

Ввиду этого и соотношений (7), получим

$$e^{2\alpha} g_{ik}h^k_{jl} + e^{2\alpha} g_{kj}h^k_{il} + \bar{g}_{ijl} = 2e^{2\alpha} g_{ij}\alpha_l.$$

Отсюда находим компоненты тензора h^i_{jk} :

$$h^i_{jk}=\delta^i_j\alpha_k + \delta^i_k\alpha_j - g_{jk}\alpha^i - 1/2 \ \bar{g}^{il} (\bar{g}_{ljk}+\bar{g}_{klj}-\bar{g}_{jkl}). \qquad (10)$$

Подставляя (10) в (7), получим

$$\varpi^i_j-\omega^i_j=\delta^i_j d\alpha+\alpha_j\omega^i-\alpha^i\omega_j-1/2\,\bar{g}^{il}(\bar{g}_{ljk}+\bar{g}_{klj}-\bar{g}_{jkl})\omega^k . \qquad (11)$$

Как и в [1] введем обозначения

$$\gamma^i_{jk} =- 1/2\,\bar{g}^{il}(\bar{g}_{ljk}+\bar{g}_{klj}-\bar{g}_{jkl}), \qquad (12)$$

где $\gamma^i_{jk} = \gamma^i_{kj}$. Тогда (11) с учетом (12) примет вид :

$$\theta^i_j - \omega^i_j = \delta^i_j d\alpha + \alpha_j\omega^i - \alpha^i\omega_j , \qquad (13)$$

где $\theta^i_j = \varpi^i_j - \gamma^i_{jk}\omega^k$, $\alpha^i = g^{ij}\alpha_j$, $\omega_j= g_{jk}\omega^k$.

Найдем дифференциальные продолжения соотношений (9) и (13). Дифференцируя первое из них, получим

$$\nabla\alpha_i\wedge\omega^i = 0, \qquad (14)$$

где $\nabla\alpha_i = d\alpha_i - \alpha_j\omega^j_i$ – ковариантный дифференциал ковектора α_i. Из соотношений (14) в силу леммы Картана следует, что

$$\nabla\alpha_i = \alpha_{ij}\omega^j, \qquad (15)$$

где $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. Дифференцируя уравнения (13) и учитывая, что

$$d\theta^i_j=\theta^k_j\wedge\theta^i_k + R^i_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l,$$

где тензор R^i_{jkl} выражается через тензор $\bar{R}^i_{jkl}$, получим

$$(\nabla\alpha_i-\alpha_i d\alpha+\beta\omega_i)\wedge\omega_j -(\nabla\alpha_j-\alpha_j d\alpha+\beta\omega_j)\wedge\omega_i-R_{ijkl}\omega^k\wedge\omega^l=0, \qquad (16)$$

где

$$\beta = 1/2\, g^{kl}\alpha_k\alpha_l . \qquad (17)$$

Далее имеем $\nabla\alpha_i - \alpha_i d\alpha + \beta\omega_i = (\alpha_{ij} - \alpha_i\alpha_j + \beta g_{ij})\omega^j = \bar{\alpha}_{ij}\omega^j$, где

$$\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} - \alpha_i\alpha_j + \beta g_{ij} . \qquad (18)$$

Подставляя (18) в (16), получим

$$(\bar{\alpha}_{ik}\, g_{jl} - \bar{\alpha}_{jk}\, g_{il} - R_{ijkl})\omega^k\wedge\omega^l = 0.$$

Окончательно имеем

$$R_{ijkl}=\bar{\alpha}_{ik}\, g_{jl}- \bar{\alpha}_{il}\, g_{jk} -\bar{\alpha}_{jk}\, g_{il}+ \bar{\alpha}_{jl}\, g_{ik} . \qquad (19)$$

Следуя терминологии Нордена [2] такое риманово пространство назовем конформно-евклидовым и обозначим через C^n. Свертывая (19) с g^{ik}, найдем

$$1/e^{2\alpha}R_{jl} = \bar{\alpha}\, g_{jl} + (n-2)\,\bar{\alpha}_{jl},$$

где $\bar{\alpha} = g^{ik}\bar{\alpha}_{ik}$.

При $n=2$ из последней системы следует, что $1/e^{2\alpha}R_{jl} = \bar{\alpha}\, g_{jl}$, т.е. рассматриваемое пространство является пространством Эйнштейна. Но нас больше интересует случай $n\geq 3$. В этом случае $\bar{\alpha}_{jl} = 1/(n-2)(1/e^{2\alpha} R_{jl} - \bar{\alpha}\, g_{jl})$.

Свертывая последнее соотношение с g^{jl}, найдем

$$\overline{\alpha} = 1/e^{4\alpha} R/2(n\text{-}1), \qquad (20)$$

где R – скалярная кривизна пространства C^n. Тогда

$$\overline{\alpha}_{jl} = 1/(n\text{-}2)\,(1/e^{2\alpha} R_{jl} - 1/e^{4\alpha} R/2(n\text{-}1)\, g_{jl}). \qquad (21)$$

Приравнивая (18) и (21), а также (20) с $\overline{\alpha} = g^{ik}\overline{\alpha}_{ik}$, получим

$$\alpha_{ij} - \alpha_i\alpha_j + \beta\, g_{ij} = 1/(n\text{-}2)(1/e^{2\alpha} R_{ij} - 1/e^{4\alpha} R/2(n\text{-}1)\, g_{ij}),$$

$$g^{ij}\alpha_{ij} + (n\text{-}2)\beta = 1/e^{4\alpha} R/2(n\text{-}1). \qquad (22)$$

После умножения второго равенства из (22) на g_{ij}, запишем

$$\alpha_{ij} = (1/e^{4\alpha} R/2n(n\text{-}1) - (n\text{-}2)\beta/n)\, g_{ij}. \qquad (23)$$

Подставляя (23) в (18), получаем

$$\overline{\alpha}_j = Q\, g_{ij} - \alpha_i\alpha_j, \qquad (24)$$

где $Q = 1/e^{4\alpha} R/2n(n\text{-}1) - 2(n\text{-}1)\beta/n$.

Если коэффициент в (23) при g_{ij} обозначить за T, то $\alpha_{ij} = T g_{ij}$. И из (15) найдем

$$\nabla\alpha_i = T g_{ij}\omega^j = T\omega_i. \qquad (25)$$

В работе [3] рассматривалось торсообразующее векторное поле, а именно одно из его частных случаев – сходящееся векторное поле, порожденное конформным отображением в евклидовом пространстве. Для торсообразующего векторного поля v^i будут верны равенства

$$V_{ij} = \alpha\, g_{ij} + \beta_j v_i. \qquad (26)$$

Сравнивая (24) и (26) , можно сделать вывод, что векторное поле α^i является торсообразующим. В зависимости от α и β_j в (26) можно получить специальный вид торсообразующего векторного поля [4]. В нашем случае Q – произвольная функция от α, а α_j – градиент. Получаем, что α^i является конциркулярным векторным полем [5]. Нами доказана

Теорема. Конформное отображение между областями евклидова и риманова пространств определяет в области евклидова пространства конциркулярное векторное поле.

Векторное поле α^i , по аналогии с [2], назовем вектором конформного преобразования. Тогда теорему можно сформулировать следующим образом: вектор конформного преобразования между евклидовым и римановым пространствами является конциркулярным векторным полем.

Для более наглядного представления полученного результата рассмотрим в E^n подповерхности уровня коэффициента конформности α - эквиконформные гиперповерхности. Выберем в E^n репер так, чтобы вектор $\overline{e}_n$ был ортогонален к этим гиперповерхностям и имел единичную длину, а вектора $\overline{e}_a$ (a=1,...,n-1) касались этих гиперповерхностей. Тогда будут верны соотношения

$$(\overline{e}_a\, \overline{e}_b) = g_{ab},\ (\overline{e}_a\, \overline{e}_n) = 0,\ (\overline{e}_n\, \overline{e}_n) = 1. \qquad (27)$$

Уравнение эквиконформной гиперповерхности запишем в виде

$$\omega^n = 0. \qquad (28)$$

После дифференцирования (28), найдем

$$\omega^n_a = b_{ab}\omega^b, \qquad (29)$$

где $b_{ab}=b_{ba}$ – асимптотический тензор эквиконформной гиперповерхности. Также имеем $d\alpha = \alpha_n\omega^n$. Так как в этом случае $\alpha_a = 0$ и $\beta = 1/2(\alpha_n)^2$, то из соотношений (25) следует, что

$$\omega^n_a = -T/\alpha_n\, \omega_a,\ d\alpha_n = T\omega_n\,. \qquad (30)$$

На эквиконформной гиперповерхности $d\alpha=0$, $\omega^n = 0$.Тогда в силу первого из соотношений (30) и (29) получаем : $b_{ab} = -T/\alpha_n\, g_{ab}$. Отсюда следует, что эквиконформные гиперповерхности являются гиперсферами S^{n-1}. При этом геодезические круги сферы S^{n-1} будут переходить также в геодезические круги. Это было несколько иначе обнаружено К. Яно [5].

Библиографический список

1. *Акивис М.А*. Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977. 83 с.
2. *Норден А.П*. Пространства аффинной связности. М., 1976.
3. *Кузнецов Г.В*. О конформном соответствии между областями евклидова пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1996. Вып. 27. С.48-53.
4. *Каган В.Ф.* Субпроективные пространства. М., 1961.
5. *Yano K.* Concircular geometry 1-4 // Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1940. №16. P.195-200, 354-360, 442-448, 505-511.

G.V. K u z n e t s o v

ABOUT THE CONFORMAL CORRESPONDENCE BETWEEN THE DOMAINS OF THE EUCLIDEAN AND RIEMANN SPACES

In the given work is considered conformal correspondence between areas euclidean and riemann of spaces. The vector conformal of transformation is entered and is shown, that the given vector is concircular a vector field. It is considered equiconformal hypersurfaces, which in this case is hyperspheres.

УДК 514.75

К АФФИННОЙ ТЕОРИИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

И.А.К у з я к и н а

(*Калининградский государственный университет*)

Теория точечных отображений применена к аффинной теории векторных полей. Введены понятия связности, обобщающей связность Врэнчану, коллинеации и гиперплоскости Чеха, индикатрисы и множества характеристических