Т е о р е м а 7. Если $\|\xi\| = C$ на M, то (M, g) локально изометрично $\mathbb{R}\times\widetilde{M}$ с метрикой $ds^2 = c^2dt^2 + e^{-c\,dt}\tilde{g}$, где $\tilde{g}$ -индуцированная метрика на $\widetilde{M}$, $dt(\xi) = 1$.

Доказательство этой теоремы ничем не отличается от доказательства, приведенного в [5], для случая, когда h -о.р.с.

Пусть h° -о.р.с. на M. Оказывается, что все нетривиальные о.р.с. на поверхностях имеют вид (I).

Т е о р е м а 8 [5]. I/ Пусть (M, g) -связное и h - о.р.с. типа $\mathcal{C}_1$ на M. Тогда M имеет постоянную стрицательную кривизну. 2/Пусть (M, g) -связное, полное и односвязное. M допускает ненулевую о.р.с. типа $\mathcal{C}_1$ тогда и только тогда, когда (M, g) изометрично гиперболическому пространству H^n.

П р и м е р. Если h -о.р.с. типа $\mathcal{C}_1$ на M и $\overline{\nabla} = \nabla - h$ каноническая связность на M, то расслоение голономии связности $\overline{\nabla}$ дает пример G -структуры, принадлежащей классу $\mathcal{C}_1$.

Библиографический список

I. К о б а я с и Ш., Н о м и д з у К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, I98I. Т.I, 2.

2. Е р м о л и ц к и й А.А. Вторая квадратичная форма G -структуры и близко особые структуры // Докл. Болг. АН. I98I. Т.34. № 7. С.963-964.

3. Nicolescu L. Sur la géométrie de l'algebre associel á un champ teksoriel du type (1.2) || Tensor. 1982. V. 38. P. 235-241.

4. К о в а л ь с к и й О. Обобщенные симметрические пространства. М.: Мир, I984.

5. Tricerri F., Vanhecke L. Homogeneous structures on Riemannian manifolds. London Math. Soc. Lect. Note Ser. V. 83: 1983.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. I9 1988

УДК 5I4.75

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ СТРУКТУРАХ ПОЧТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Е.Т.И в л е в
(Томский политехнический институт)

В статье строятся инвариантные структуры почти произведения пространства аффинной связности $A_{n,n}$, определяемые с помощью тензора кручения-кривизны этой связности.

Все встречающиеся в работе функции предполагаются аналитическими. Обозначения и терминология соответствуют принятым в [I] - [8].

I. Рассматривается пространство $A_{n,n}$ с аффинной связностью C, которое, как известно [I] при $m = n$, является 2 -мерным расслоенным пространством с n-мерной дифференцируемой базой $\mathfrak{M}_n$ и n-мерными аффинными слоями A_n. Будем предполагать, что для пространства $A_{n,n}$ будут иметь место результаты, изложенные в пункте I статьи [I] (при $m = n$). При этом в формулах (I)-(3) этой статьи все индексы $i, j, k, \ell, \alpha, \beta, \gamma, \sigma, \mu$ будем считать изменяющимися от I до n. В дальнейшем символом $([k], (s))$ будем обозначать формулу под номером s статьи $[k]$.

2. Будем говорить, что в аффинном расслоении $A_{n,n}$ задана структура почти произведения [2, с.I85-I87] или композиция А.П.Нордена $(\tau, n-\tau)^{\tau}$ в смысле [3], если на базе этого расслоения заданы два поля геометрических объектов [5]:

$$a_p = \{a^{\beta_q}_{\alpha_p}\},\ \nabla a^{\beta_q}_{\alpha_p} + \omega^{\beta_q}_{\alpha_p} + a^{\gamma_q}_{\alpha_p} a^{\beta_q}_{\beta_p} \omega^{\beta_p}_{\gamma_q} = a^{\beta_q}_{\alpha_p i}\,\omega^i$$

$$(p, q = 1,2;\ p \neq q,\ \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \sigma_1, \tau_1 = \overline{1,\tau} < n;\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \tau_2 = \overline{\tau+1, n}). \qquad (I)$$

Геометрически объекты (I) каждой точке $(u) \in \mathfrak{M}_n$ в слое $A_n(u)$ сопоставляют линейные подпространства L^p: $L^1 \cap L^2 = A$, $L^1 \cup L^2 = A_n$, $\dim L^1 = \tau$, $\dim L^2 = n-\tau$, которые в слоевых аффинных координатах определяются уравнениями соответственно:

$$L^p:\ x^{\beta_q} = a^{\beta_q}_{\alpha_p} x^{\alpha_p}. \qquad (2)$$

Если компоненты геометрических объектов (I) являются функциями компонент R^i_{oke}, R^i_{jke} тензора кручения-кривизны связности C, то рассматриваемую структуру почти произведения аффинного расслоения $A_{n,n}$ будем называть внутренней структурой $(\tau, n-\tau)^\tau$ аффинного расслоения $A_{n,n}$.

3. Каждой точке $(u)\in\mathcal{M}_n$ расслоения $A_{n,n}$ в слое $A_n(u)$ сопоставим точку $T(u)$: $\overline{T}=\overline{A}+t^i\overline{e}_i$ и линейные подпространства $\Gamma^p\subset L^p$ $(\dim\Gamma^1=\tau-1,\ \dim\Gamma^2=n-\tau+1)$, определяемые уравнениями соответственно:

$$\Gamma^p:\ x^{\beta_q}=a^{\beta_q}_{\alpha_p}x^{\alpha_p},\quad y_{\alpha_p}x^{\alpha_p}=0. \tag{3}$$

В каждом линейном подпространстве рассмотрим линейный комплекс

$$K^p(T,\Gamma^p)=\{(v,w)\,|\,R(v,w)T\in\Gamma^p_{n-1};\ v,w\in L^p\};\quad \Gamma^p_{n-1}=\Gamma^p\cup L^q, \tag{4}$$

отвечающий точке T и подпространству Γ^p, который определяется уравнениями:

$$K^p(T,\Gamma^p):\ \begin{array}{l} y_{\beta_p}b^{\beta_p}_{\alpha_p}t^\kappa S^{\alpha_p}_{\kappa\sigma_p\tau_p}v^{\sigma_p}w^{\tau_p}=0,\\ v^{\sigma_q}=a^{\sigma_q}_{\sigma_p}v^{\sigma_p},\quad w^{\tau_q}=a^{\tau_q}_{\tau_p}w^{\tau_p}\quad (\imath,\jmath,\kappa=\overline{0,n};\ t^0=1),\end{array} \tag{5}$$

где

$$b^{\beta_p}_{\alpha_p}=\delta^{\beta_p}_{\alpha_p}-a^{\gamma_q}_{\alpha_p}a^{\beta_p}_{\gamma_q},\quad S^{\alpha_p}_{\kappa\sigma_p\tau_p}=R^{\alpha_p}_{\kappa\sigma_p\tau_p}+R^{\alpha_p}_{\kappa\sigma_q[\sigma_p}a^{\sigma_q}_{\tau_p]}+R^{\alpha_p}_{\kappa\sigma_q\tau_q}a^{\sigma_q}_{\sigma_p}a^{\tau_q}_{\tau_p}. \tag{6}$$

4. Из (5) и (6) следует, что в каждом слое $A_n(u)$ точки $(u)\in\mathcal{M}_n$ определены аффинные преобразования подпространств L^p в себя с центром в точке A:

$$\overset{(p)}{\Pi}(T,v)=\{b^{\beta_p}_{\alpha_p}t^\kappa S^{\alpha_p}_{\kappa\sigma_p\tau_p}v^{\tau_p}\},\quad v^{\tau_q}=a^{\tau_q}_{\tau_p}v^{\tau_p}, \tag{7}$$

отвечающие точке T и направлению $v\in L^p$, каждое из которых подпространство $\Gamma^p\subset L^p$ переводит в подпространство $\overset{*}{\Gamma}{}^p\subset L^p$, отвечающее направлению $v\in L^p$ в нуль-системе (4). Из (6) и (7) замечаем, что каждому направлению $v\in L^p$ в слое $A_n(u)$ точки $(u)\in\mathcal{M}_n$ отвечает гиперплоскость

$$\overset{(p)}{E}_{n-1}(v)=\{T\,|\,\overset{(p)}{\Pi}(T,v)\to W\}:\ b^{\beta_p}_{\alpha_p}t^\kappa S^{\alpha_p}_{\kappa\beta_p\tau_p}v^{\tau_p}=0,\ v^{\tau_q}=a^{\tau_q}_{\tau_p}v^{\tau_p}\quad (t^0=1). \tag{8}$$

В соответствии с (8) рассмотрим каждое линейное подпространство

$$\overset{(p)}{\mathcal{L}}(L^p)=\bigcap_{v\in L^p}\overset{(p)}{E}_{n-1}(v):\ t^\kappa S^{\alpha_p}_{\kappa\alpha_p\tau_p}=0\quad (t^0=1). \tag{9}$$

5. О п р е д е л е н и е I. Линейные подпространства L^p в каждом слое $A_n(u)$ точки $(u)\in\mathcal{M}_n$ аффинного расслоения $A_{n,n}$ называются основными, если

$$\overset{(p)}{\mathcal{L}}(L^p)\parallel L^q\quad (p,q=1,2;\ p\neq q). \tag{10}$$

Из (9), (10) в силу (6) и (3) заключаем с учетом определения I, что подпространства L^p будут основными тогда и только тогда, когда величины $a^{\alpha_p}_{\tau_q}$ удовлетворяют следующей системе $M=2\tau(n-\tau)$ алгебраических неоднородных уравнений:

$$\begin{array}{l}\varphi_{\mu_q\gamma_p}\equiv R^{\alpha_q}_{\lambda_p\sigma_q\tau_q}a^{\sigma_q}_{\alpha_p}a^{\tau_q}_{\gamma_p}a^{\alpha_p}_{\alpha_q}a^{\lambda_p}_{\mu_q}+\ldots+R^{\sigma_p}_{\mu_q\sigma_q\lambda_q}a^{\sigma_q}_{[\sigma_p}a^{\lambda_q}_{\gamma_p]}-\\ -(R^{\alpha_p}_{\mu_q\sigma_q\gamma_p}+\delta^{\alpha_p}_{\gamma_p}R^{\sigma_p}_{\mu_q\sigma_p\sigma_q})a^{\sigma_q}_{\alpha_p}-(R^{\beta_p}_{\sigma_p\beta_p\gamma_p}\delta^{\lambda_q}_{\mu_q}+R^{\lambda_q}_{\mu_q\sigma_p\gamma_p})a^{\sigma_p}_{\lambda_q}+R^{\beta_p}_{\mu_q\gamma_p\beta_p}=0\end{array} \tag{II}$$

$(p,q=1,2;\ p\neq q;\ \varphi_{\mu_1\gamma_2}\neq\varphi_{\gamma_2\mu_1})$.

Из (II) вытекает следующая

Т е о р е м а I. В общем случае в каждом слое $A_n(u)$ соответствующей точки $(u)\in\mathcal{M}_n$ аффинного расслоения $A_{n,n}$ имеется конечное число основных линейных подпространств L^p.

6. Рассмотрим на базе $\mathcal{M}_n$ расслоения $A_{n,n}$ следующие величины, удовлетворяющие с учетом ([I], (3)) соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$R_{ke}=R^j_{kje},\quad \nabla R_{ke}=R_{kei}\omega^i. \tag{I2}$$

Геометрически тензор Риччи (см. [4], (6), с. I5I) в слое $A_n(u)$, как показано в [8], определяет в силу (I2):

I°. Гиперконус Q^0_{n-1} с вершиной в точке A:

$$Q^0_{n-1}:\qquad R_{(ke)}x^k x^e=0; \tag{I3}$$

2°. Линейный гиперкомплекс C^0_{n-1}:

$$C^0_{n-1}:\qquad R_{[ke]}x^k y^e=0; \tag{I4}$$

(см. (I6)-(I8) в [8]).

О п р е д е л е н и е 2. Линейные подпространства L^p в каждом слое $A_n(u)$ точки $(u) \in \mathcal{M}_n$ аффинного расслоения $A_{n,n}$ называются главными, если они сопряжены относительно гиперкомплекса $\overset{\circ}{C}_{n-1}$ и гиперконуса $\overset{\circ}{Q}_{n-1}$.

Из (I3), (I4) и (2) с учетом определения 2 следует, что линейные подпространства L^p будут главными тогда и только тогда, когда

$$\psi_{\alpha_q \beta_p} \equiv R_{\alpha_p \beta_q} a^{\alpha_p}_{\alpha_q} a^{\beta_q}_{\beta_p} + R_{\alpha_p \beta_p} a^{\alpha_p}_{\alpha_q} + R_{\alpha_q \beta_q} a^{\beta_q}_{\beta_p} + R_{\alpha_q \beta_p} = 0 \qquad (I5)$$

$$(p, q = 1,2;\ p \neq q;\ \psi_{\alpha_1 \beta_2} \neq \psi_{\beta_2 \alpha_1}).$$

Из (I5) вытекает следующая теорема

Т е о р е м а 2. В общем случае в каждом слое $A_n(u)$ точки $(u) \in \mathcal{M}_n$ расслоения $A_{n,n}$ имеется конечное число главных подпространств L^p.

7. Обозначим $\Pi^{pq}(T,v)$ - аффинное преобразование подпространства L^p в себя с центром A, отвечающее точке $T \in A_n$ и направлению $v \in A_n$ и являющееся ограничением аффинного преобразования $\Pi(T,v)$ слоя A_n в себя на подпространство L^p в направлении L^q. Здесь $\Pi(T,v)$, отвечающее точке T и направлению $v \in A_n$, имеет тот же смысл, что и ([8], (I4)). Из (6) и (3) в силу (8) и (I4) получаем

$$\Pi^{pq}(T,v) = \{ t^J R^{\beta_q}_{J \gamma_p j} v^j \} \quad (t^0 = 1). \qquad (I6)$$

Из (I6), (I5), (II) вытекает следующая

Т е о р е м а 3. Если в каждом слое $A_n(u)$ точки $(u) \in \mathcal{M}_n$ расслоения $A_{n,n}$ подпространства L^p являются основными (главными) и аффинные преобразования $\Pi^{pq}(T,v)$, $\forall T \in L^p$, $\forall v \in L^q$ являются преобразованиями W [7], т.е. преобразованиями с нулевыми следами, то эти подпространства являются главными (основными).

8. Как в пункте 4 статьи [I] при $m = n$, рассматривается n-мерное многообразие пар (S, G_{n-1}) в n-мерном проективном пространстве P_n, отнесенном к проективному реперу $T = \{A_J\}$ с деривационными формулами и структурными уравнениями ([I], (12)), где $S = A_0$, $G_{n-1} = (A_1 A_2 \ldots A_n) \not\ni S$. Тогда

$$\omega^0_i = A^0_{ij} \omega^j_0, \quad \nabla A^0_{ij} + 2 A^0_{ij} \omega^0_0 = A^0_{ijk} \omega^k_0.$$

Заметим, что на многообразии пар (S, G_{n-1}) определена

связность C^n в смысле пункта 4 статьи [I] при $m = n$ с формами и структурными уравнениями ([I], (I5)), в которых компоненты тензора кривизны определяются по формулам ([I], (I6)), причем в ([I], (I5)) и ([I], (I6)) все индексы $i, j, k, \ell, \alpha, \beta, \gamma, \sigma, \tau$ изменяются от I до n.

Из (II)-(I6) в силу (6), (3), ([I], (I5)) и ([I], (I6)) вытекает следующая

Т е о р е м а 4. В каждой точке A_0 n-мерного многообразия пар (S, G_{n-1}) в пространстве P_n основные линейные подпространства L^p относительно аффинной связности C^n являются главными подпространствами относительно той же связности.

Библиографический список

I. И в л е в Е.Т. Об одном оснащении аффинного расслоения $A_{m,n}$ $(m<n)$ //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, I987. Вып. I8.

2. Е в т у ш и к Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях// Проблемы геометрии/ВИНИТИ. М., I979. Т. 9. С. 5-247.

3. Н о р д е н А.П. Теория композиций//Проблемы геометрии/ ВИНИТИ. М., I978. Т. I0. С. II7-I45.

4. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука. I976.

5. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий//Тр. Моск. матем. о-ва/М., I953. Т. 2. С. 275-382.

6. И в л е в Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях $P_{m,n}$ //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, I984. Вып. I5. С. 32-37.

7. И в л е в Е.Т., Исабеков М.Б. К проективной геометрической интерпретации некоторых образов, определяемых двухвалентными тензорами//Материалы третьей науч. конф. по матем. и мех./Томский ун-т. Томск, I973. Вып. I. С. 50-52.

8. И в л е в Е.Т. Об одном аналоге тензора Риччи расслоения $P_{n,n}$ //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, I985. Вып. I6. С. 23-26.

О п р е д е л е н и е 2. Линейные подпространства L^p в каждом слое $A_n(u)$ точки $(u)\in\mathcal{M}_n$ аффинного расслоения $A_{n,n}$ называются главными, если они сопряжены относительно гиперкомплекса c°_{n-1} и гиперконуса Q°_{n-1}.

Из (I3), (I4) и (2) с учетом определения 2 следует, что линейные подпространства L^p будут главными тогда и только тогда, когда

$$\Psi_{\alpha_q\beta_p}\equiv R_{\alpha_p\beta_q}a^{\alpha_p}_{\alpha_q}a^{\beta_q}_{\beta_p}+R_{\alpha_p\beta_p}a^{\alpha_p}_{\alpha_q}+R_{\alpha_q\beta_q}a^{\beta_q}_{\beta_p}+R_{\alpha_q\beta_p}=0 \qquad (15)$$

$$(p,q=1,2;\ p\neq q;\ \Psi_{\alpha_1\beta_2}\neq\Psi_{\beta_2\alpha_1}).$$

Из (I5) вытекает следующая теорема

Т е о р е м а 2. В общем случае в каждом слое $A_n(u)$ точки $(u)\in\mathcal{M}_n$ расслоения $A_{n,n}$ имеется конечное число главных подпространств L^p.

7. Обозначим $\Pi^{pq}(T,v)$ - аффинное преобразование подпространства L^p в себя с центром A, отвечающее точке $T\in A_n$ и направлению $v\in A_n$ и являющееся ограничением аффинного преобразования $\Pi(T,v)$ слоя A_n в себя на подпространство L^p в направлении L^q. Здесь $\Pi(T,v)$, отвечающее точке T и направлению $v\in A_n$, имеет тот же смысл, что и ([8], (I4)). Из (6) и (3) в силу (8) и (I4) получаем

$$\Pi^{pq}(T,v)=\{t^J R^{\beta_q}_{J\gamma_p j}v^j\}\quad (t^{\circ}=1). \qquad (16)$$

Из (I6), (I5), (II) вытекает следующая

Т е о р е м а 3. Если в каждом слое $A_n(u)$ точки $(u)\in\mathcal{M}_n$ расслоения $A_{n,n}$ подпространства L^p являются основными (главными) и аффинные преобразования $\Pi^{pq}(T,v),\forall T\in L^p,\forall v\in L^q$ являются преобразованиями W [7], т.е. преобразованиями с нулевыми следами, то эти подпространства являются главными (основными).

8. Как в пункте 4 статьи [I] при $m=n$, рассматривается n-мерное многообразие пар (S,G_{n-1}) в n-мерном проективном пространстве P_n, отнесенном к проективному реперу $T=\{A_J\}$ с деривационными формулами и структурными уравнениями ([I], (12)), где $S=A_0$, $G_{n-1}=(A_1A_2\ldots A_n)\not\ni S$. Тогда

$$\omega^{\circ}_i=A^{\circ}_{ij}\omega^j_{\circ},\quad \nabla A^{\circ}_{ij}+2A^{\circ}_{ij}\omega^{\circ}_{\circ}=A^{\circ}_{ijk}\omega^k_{\circ}.$$

Заметим, что на многообразии пар (S,G_{n-1}) определена

связность C^n в смысле пункта 4 статьи [I] при $m=n$ с формами и структурными уравнениями ([I], (I5)), в которых компоненты тензора кривизны определяются по формулам ([I], (I6)), причем в ([I], (I5)) и ([I], (I6)) все индексы $i,j,k,\ell,\alpha,\beta,\gamma,\sigma,\tau$ изменяются от I до n.

Из (II)-(I6) в силу (6), (3), ([I], (I5)) и ([I], (I6)) вытекает следующая

Т е о р е м а 4. В каждой точке A_0 n-мерного многообразия пар (S,G_{n-1}) в пространстве P_n основные линейные подпространства L^p относительно аффинной связности C^n являются главными подпространствами относительно той же связности.

Библиографический список

I. И в л е в Е.Т. Об одном оснащении аффинного расслоения $A_{m,n}(m<n)$ //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Вып. 18.

2. Е в т у ш и к Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях// Проблемы геометрии/ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5-247.

3. Н о р д е н А.П. Теория композиций//Проблемы геометрии/ ВИНИТИ. М., 1978. Т. 10. С. 117-145.

4. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука. 1976.

5. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий//Тр. Моск. матем. о-ва/М., 1953. Т. 2. С. 275-382.

6. И в л е в Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях $P_{m,n}$ //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1984. Вып. 15. С. 32-37.

7. И в л е в Е.Т., Исабеков М.Б. К проективной геометрической интерпретации некоторых образов, определяемых двухвалентными тензорами//Материалы третьей науч. конф. по матем. и мех./Томский ун-т. Томск, 1973. Вып. I. С. 50-52.

8. И в л е в Е.Т. Об одном аналоге тензора Риччи расслоения $P_{n,n}$ //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1985. Вып. 16. С. 23-26.