10. *Малаховский В. С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

11. *Малаховский В. С., Махоркин В. В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1974. Вып. 6. С. 113—133.

M. Kretov

Complexes of hyperboloids without focal manifolds

We continue to research in three-dimensional equiaffine space the complexes (three-parameter families) of hyperboloids of one sheet. The center of the beam axis of rectilinear congruence of this hyperboloid describes the line with tangents parallel to the first coordinate vector, and the indicatrix of the coordinate vectors are lines parallel these vectors with empty focal manifold. The existence theorem of the investigated diversity is proved. Characteristic manifold of the forming element of this complex is characterized geometrically. Geometric properties are obtained for it.

Key words: complex, frame, one-sheeted hyperboloid, characteristic variety, focal variety, equiaffine space, indicatrix of a vector, congruence.

УДК 514.75

А. В. Кулешов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
arturkuleshov@yandex.ru

Об эквивалентности двух точек зрения на центропроективные реперы

Построен изоморфизм расслоения фактор-реперов $G(P_n)$ на расслоение центропроективных реперов $C(P_n)$ над проективным пространством P_n. Данная конструкция проясняет геометрический смысл формул в статье [2].

Ключевые слова: струя, фактор-репер, расслоение фактор-реперов, проективное пространство.

1. Постановка задачи

Пусть P_n — n-мерное вещественное проективное пространство (n ≥ 1), $C(P_n)$ — расслоение центропроективных реперов (см., например: [3]); $G(P_n)$ — расслоение фактор-реперов в смысле работы [1] над P_n.

Задача настоящей работы — построить изоморфизм $G(P_n)$ на $C(P_n)$. Ее решение открывает новые возможности для привлечения аппарата теории струй Эресмана к проективной дифференциальной геометрии. В частности, в рамках данного подхода проясняется происхождение некоторых конструкций в статье [2].

2. Проективный репер, определяемый локальной картой на проективном пространстве

Утверждение 1. *Имеется взаимно-однозначное соответствие между фактор-реперами пространства P_n в точке $A_0 \in P_n$ и центропроективными реперами вида $\Re_\varphi = \{A_0, A_i, E\}$.*

Доказательство. Пусть (φ, U) — локальная карта на P_n с центром $A_0 \in P_n$. Каждый проективный репер $\Re$ определяет некоторую аффинную карту π в окрестности точки $A_0 \in P_n$, причем данное соответствие взаимно однозначно. Репер, определяющий аффинную карту π, обозначим через $\Re_\pi$. Требование, согласно которому карты (φ, U) и π должны определять один и тот же фактор-репер [1]:

$$[\varphi] = [\pi], \tag{1}$$

является инвариантным относительно выбора координат в P_n. Поэтому достаточно показать, что все коэффициенты, определяющие выбор репера $\mathfrak{R}$, однозначно определяются координатами фактор-репера $[\varphi]$ на многообразии P_n в локальной карте (φ, U).

Пусть $\mathfrak{R}_0$ —— некоторый «начальный» репер с началом в точке $A_0 \in P_n$, в остальном выбранный произвольным образом; и пусть (x^i) — порожденная им аффинная карта. Тогда карта φ и обратное к ней отображение φ^{-1} задаются произвольными C^∞-гладкими функциями:

$$\varphi: \ t^i = \tilde{\varphi}^i(x^1, ..., x^n), \ i = \overline{1,n},$$

$$\varphi^{-1}: \ x^i = \varphi^i(t^1, ..., t^n), \ i = \overline{1,n},$$

подчиненными лишь условию обратимости, что влечет невырожденность якобиана:

$$\det\left\|\frac{\partial\varphi^i}{\partial t^j}\right\| \neq 0 .$$

Карта π и отображение π^{-1} определяются дробно-линейными функциями:

$$\pi: \ t^i = \tilde{\pi}^i(x^1, ..., x^n), \ i = \overline{1,n},$$

$$\pi^{-1}: \ x^i = \pi^i(t^1, ..., t^n), \ i = \overline{1,n},$$

где

$$\pi^i(t^1, ..., t^n) = \frac{a^i_j t^j}{b_j t^j + 1}, \quad i, j = \overline{1,n},$$

причем

$$\det\left\|a^i_j\right\| \neq 0 .$$

Координаты фактор-репера $[\varphi]$ отображения φ относительно локальных координат (x^i) в окрестности точки $A_0 \in P_n$ имеют вид:

$$(\varphi^i_j, \varphi_j),$$

где

$$\varphi^i_j = \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j}(0), \ \varphi_j = \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial t^j \partial t^k}(0) \frac{\partial \tilde{\varphi}^k}{\partial x^i}(x_0), \ x_0 = \varphi(0). \qquad (2)$$

Поэтому условие (1) равносильно следующим равенствам:

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j}(0) = \frac{\partial \pi^i}{\partial t^j}(0), \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial t^j \partial t^k}(0) \frac{\partial \tilde{\varphi}^k}{\partial x^i}(x_0) = \frac{\partial^2 \pi^i}{\partial t^j \partial t^k}(0) \frac{\partial \tilde{\pi}^k}{\partial x^i}(x_0). \qquad (4)$$

Вычислим значения частных производных 1-го и 2-го порядка от функций π^i в точке $0 \in R^n$:

$$\frac{\partial \pi^i}{\partial t^j} = \frac{(a^i_j b_k - a^i_k b_j)t^k + a^i_j}{(b_k t^k + 1)^2}, \quad i, j, k = \overline{1, n},$$

$$\frac{\partial \pi^i}{\partial t^j}(0) = a^i_j, \quad i, j = \overline{1, n}, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial \pi^i}{\partial t^j \partial t^k}(0) = -(a^i_j b_k + a^i_k b_j), \quad i, j, k = \overline{1, n}. \qquad (6)$$

Пусть величины $\tilde{a}^i_j$ образуют матрицу, обратную к a^i_j:

$$\tilde{a}^i_k a^k_j = \delta^i_j.$$

Тогда

$$\frac{\partial \tilde{\pi}^i}{\partial x^j}(0) = \tilde{a}^i_j, \quad i, j = \overline{1, n}, \qquad (7)$$

Подставляя в правую часть (5) равенства (6) и (7), получим:

$$\frac{\partial^2 \pi^i}{\partial t^j \partial t^k}(0)\frac{\partial \widetilde{\pi}^k}{\partial x^i}(x_0) = -(a^i_j b_k + a^i_k b_j)\,\widetilde{a}^k_i = -(1+n)b_j\,,$$

откуда выразим b_j:

$$b_j = -\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\partial^2 \pi^i}{\partial t^j \partial t^k}(0)\frac{\partial \widetilde{\pi}^k}{\partial x^i}(x_0)\,. \tag{8}$$

Подставляя в правые части формул (5) и (8) выражения (2), (3) и (4), получим окончательно:

$$a^i_j = \varphi^i_j,\; b_j = -\frac{1}{n+1}\varphi_j,\quad i,j=\overline{1,n}.$$

Таким образом, коэфициенты a^i_j и b_j однозначно выражаются через координаты фактор-репера $[\varphi]$, и наоборот. Значит, соответствие F между фактор-реперами и центропроективными реперами

$$F:\,[\varphi]\mapsto \Re_\pi \tag{9}$$

является взаимно-однозначным. Утверждение доказано.

Следствие. *Пусть P_n — n-мерное вещественное проективное пространство ($n \geq 1$), $C(P_n)$ — расслоение центропроективных реперов над P_n; $G(P_n)$ — расслоение фактор-реперов над P_n. Тогда отображение*

$$F:\,C(P_n)\to G(P_n)\,,$$

определенное по правилу (9), является изоморфизмом главных расслоений.

Замечание. Пусть (y^i) — аффинные координаты в репере $\Re_\pi$. Тогда справедливы формулы перехода от (x^i) к (y^i):

$$y^i = \frac{\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial t^j}(0)\cdot x^j}{-\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial t^j\partial t^k}(0)\dfrac{\partial\widetilde{\varphi}^k}{\partial x^i}(x_0)\cdot x^j+1}\,. \tag{10}$$

Используя тождества [2] (обозначения сохранены)

$$\frac{\partial x^{q}}{\partial x^{q'}}\frac{\partial^{2}x^{q'}}{\partial x^{q}\partial x^{p}}=\frac{\partial}{\partial x^{p}}\left(\ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}}\right\|\right),$$

равенства (10) можно переписать в виде:

$$y^{i}=\frac{\dfrac{\partial\varphi^{i}}{\partial t^{j}}(0)\cdot x^{j}}{-\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{\partial}{\partial t^{j}}\left(\ln\det\left\|\dfrac{\partial\varphi^{i}}{\partial t^{k}}\right\|\right)\Bigg|_{t=0}\cdot x^{j}+1}. \qquad (11)$$

Отметим, что формула (11) совпадает с законом преобразования координат пунктора [2].

Список литературы

1. *Кулешов А.В.* Центропроективные реперы как классы эквивалентности реперов второго порядка // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 94—107.

2. *Лемлейн В.Г.* Локальные центро-проективные пространства и связности в дифференцируемом многообразии // Лит. мат. сб. 1964. Т 4. С. 41—131.

3. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий : учеб. пособие. Калининград, 2000.

A. Kuleshov

On the equivalence of two viewpoints on the center-projective frames

Let P_n be a real projective space of dimension n. We denote by $G(P_n)$ and $C(P_n)$ the quotient frame bundle on P_n respectively. The isomorphism between $G(P_n)$ and $C(P_n)$ has been constructed. This makes clear some formulae in the paper [2].

Key words: jet, quotient frame, quotient frame bundle, projective space, center-projective frame.