расслоения $T^*(M_n)$ со связностью $\nabla^н$ является проектируемым при условии, что связность ∇ на базе проективно-евклидова и неплоская.

Список литературы

1. *Jano K., Ishihara Sh.* Tangens and cotangens bundles; differential geometry. New York: Dekker, 1973. IX: 423 p.

2. *Султанова Н.С.* Инфинитезимальные афинные преобразования кокасательного расслоения со связностью горизонтального лифта // Движения в обобщенных пространствах. Межвуз. сб. науч. тр. Пенза, 1999. С.150-156.

3. *Синюков Н.С.* Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979. 256 с.

N.S. Sultanova

ON THE INFINITESIMAL AFFINE TRANSFORMATIONS
IN THE COTANGENT BUNDLE WITH THE HORIZONTAL LIFT

We obtained a canonical expansion of any infinitesimal affine transformations on $T^*(M_n)$ with connections $\nabla^н$ on condition that T=0, W=0, where T is a torsion tensor, W is a projective curvature tensor for the connections ∇.

УДК 514.76

Ю.И. Шевченко

(Калининградский государственный университет)

ПУЧКИ АФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ НА ГРУППЕ ЛИ И ПАРАЛЛЕЛИЗУЕМОМ МНОГООБРАЗИИ

Путем сопоставления структурных уравнений группы Ли и соответствующего пространства аффинной связности введен пучок аффинных связностей на группе Ли. Три аффинных связности Картана-Схоутена-Эйзенхарта, две из которых без кривизны и одна без кручения, принадлежат этому пучку. Пучок аффинных связностей распространен на параллелизуемое многообразие, обобщающее группу Ли. В общем случае обобщенный пучок содержит лишь две специальных аффинных связности: одну без кривизны и одну без кручения.

1. Группа Ли и пространство аффинной связности. Пусть r-членная группа Ли G_r имеет структурные уравнения:

$$D\omega^{\alpha}=C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\beta}\wedge\omega^{\gamma}\quad(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon=\overline{1,r}),\tag{1}$$

причем константы $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ антисимметричны $C^{\alpha}_{(\beta\gamma)}=0$ и удовлетворяют тождествам Якоби $C^{\alpha}_{\beta\{\gamma}C^{\beta}_{\delta\varepsilon\}}=0$, где круглые скобки обозначают симметрирование, а фигурные – циклирование. Структурные уравнения соответствующего пространства классической аффинной связности имеют вид :

$$D\omega^{\alpha}=\omega^{\beta}\wedge\theta^{\alpha}_{\beta}+S^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\beta}\wedge\omega^{\gamma},\tag{2}$$

$$D\theta^{\alpha}_{\beta}=\theta^{\gamma}_{\beta}\wedge\theta^{\alpha}_{\gamma}+R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\delta},\tag{3}$$

причем компоненты объектов кручения $S^{\alpha}_{\beta\gamma}$ и кривизны $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ удовлетворяют соотношениям $S^{\alpha}_{(\beta\gamma)}=0$, $R^{\alpha}_{\beta(\gamma\delta)}=0$.

Представим уравнения (1) в виде (2) и учтем, чтобы возникшие формы θ^{α}_{β} удовлетворили уравнениям (3). Эта задача решается неоднозначно.

2. Первая аффинная связность. Правые части уравнений (1) имеют вид 2-ой совокупности слагаемых в уравнениях (2), положим

$$\omega^{\beta}\wedge\theta^{\alpha}_{\beta}=0,\tag{4}$$

тогда $S^{\alpha}_{\beta\gamma}=C^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Разрешим уравнения (4) по лемме Картана

$$\theta^{\alpha}_{\beta}=\lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma},\tag{5}$$

причем $\lambda^{\alpha}_{[\beta\gamma]}=0$; квадратные скобки обозначают альтернирование по крайним индексам в них. Дифференцируя уравнения (5) внешним образом с помощью структурных уравнений (1,3), найдем

$$(d\lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}+C^{\varepsilon}_{\delta\gamma}\lambda^{\alpha}_{\beta\varepsilon}\omega^{\delta}+\lambda^{\varepsilon}_{\beta\gamma}\lambda^{\alpha}_{\varepsilon\delta}\omega^{\delta}+R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\omega^{\delta})\wedge\omega^{\gamma}=0.$$

Воспользуемся леммой Картана

$$d\lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}+(C^{\varepsilon}_{\delta\gamma}\lambda^{\alpha}_{\beta\varepsilon}+\lambda^{\varepsilon}_{\beta\gamma}\lambda^{\alpha}_{\varepsilon\delta}+R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta})\omega^{\delta}=\lambda^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\omega^{\delta},\tag{6}$$

причем $\lambda^{\alpha}_{\beta[\gamma\delta]}=0$. Уравнения (6) запишем в виде:

$$d\lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}=(\lambda^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}-C^{\varepsilon}_{\delta\gamma}\lambda^{\alpha}_{\beta\varepsilon}-\lambda^{\varepsilon}_{\beta\gamma}\lambda^{\alpha}_{\varepsilon\delta}-R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta})\omega^{\delta}.\tag{7}$$

Значит, коэффициенты $\lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$ – абсолютные инварианты. Пусть они являются константами, т.е. $d\lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}=0$, тогда из уравнений (7) следует

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}=\lambda^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}+C^{\varepsilon}_{\delta\gamma}\lambda^{\alpha}_{\beta\varepsilon}-\lambda^{\varepsilon}_{\beta\gamma}\lambda^{\alpha}_{\varepsilon\delta}.$$

Проальтернируем по индексам γ, δ

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}=C^{\varepsilon}_{\gamma\delta}\lambda^{\alpha}_{\beta\varepsilon}-\lambda^{\varepsilon}_{\beta[\gamma}\lambda^{\alpha}_{\varepsilon\delta]}.$$

Равенства $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$=0 эквивалентны уравнениям

$$C^{\varepsilon}_{\gamma\delta}\lambda^{\alpha}_{\beta\varepsilon}-\lambda^{\varepsilon}_{\beta[\gamma}\lambda^{\alpha}_{\varepsilon\delta]}=0.$$

Эта система имеет тривиальное решение $\lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$=0, которому соответствует связность без кривизны, называемая первой аффинной связностью [1,с.39].

3. Третья аффинная связность. Представим правые части уравнений (1) в виде первой совокупности слагаемых в уравнениях (2), тогда

$$\theta^{\alpha}_{\beta}=C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}\ (S^{\alpha}_{\beta\gamma}=0).$$

Продифференцируем эти равенства внешним образом с учетом уравнений (1,3)

$$(C^{\varepsilon}_{\beta\gamma}\lambda^{\alpha}_{\varepsilon\delta}+R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}-C^{\alpha}_{\beta\varepsilon}C^{\varepsilon}_{\gamma\delta})\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\delta}=0,$$

откуда

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}=C^{\alpha}_{\beta\varepsilon}C^{\varepsilon}_{\gamma\delta}-C^{\varepsilon}_{\beta[\gamma}\lambda^{\alpha}_{\varepsilon\delta]}.$$

Раскроем альтернирование и используем тождества Якоби

$$C^{\varepsilon}_{\beta\gamma}C^{\alpha}_{\varepsilon\delta}+C^{\varepsilon}_{\gamma\delta}C^{\alpha}_{\varepsilon\beta}+C^{\varepsilon}_{\delta\beta}C^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}=0,\tag{8}$$

тогда $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}=\frac{1}{2}C^{\alpha}_{\beta\varepsilon}C^{\varepsilon}_{\gamma\delta}$. Рассматриваемая связность без кручения называется третьей аффинной связностью [1, с.65-71].

4. Пучок аффинных связностей. Обобщая рассуждения в пунктах 2 и 3, внесем параметр t в уравнения (1)

$$D\omega^{\alpha}=(1-t)C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\beta}\wedge\omega^{\gamma}+tC^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\beta}\wedge\omega^{\gamma}.\tag{9}$$

Сопоставляя уравнения (2) и (9), положим

$$\theta^{\alpha}_{\beta}=(1-t)C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma},\tag{10}$$

$$S^{\alpha}_{\beta\gamma}=tC^{\alpha}_{\beta\gamma}.\tag{11}$$

Продифференцируем равенства (10) внешним образом с учетом уравнений (1,3)

$$[(1-t)^{2}C^{\varepsilon}_{\beta\gamma}C^{\alpha}_{\varepsilon\delta}+R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}-(1-t)\ C^{\alpha}_{\beta\varepsilon}C^{\varepsilon}_{\gamma\delta}]\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\delta}=0,$$

откуда

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = (1-t)\{C^{\alpha}_{\beta\varepsilon}C^{\varepsilon}_{\gamma\delta} - (1-t)\ \ C^{\varepsilon}_{\beta[\gamma}C^{\alpha}_{\varepsilon\delta]}\}.$$

Раскроем альтернирование и воспользуемся тождествами (8)

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{1-t^2}{2}C^{\alpha}_{\beta\varepsilon}C^{\varepsilon}_{\gamma\delta}. \qquad (12)$$

Из формул (10-12) при t=0,1 получаются соответствующие формулы пунктов 3 и 2. Формула (12) показывает, что кривизна $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ обращается в нуль еще при значении параметра t= -1, соответствующем второй аффинной связности [1, с.47-50]. Составим таблицу :

№	t	θ^{α}_{β}	$S^{\alpha}_{\beta\gamma}$	$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$
1	1	0	$C^{\alpha}_{\beta\gamma}$	0
2	-1	$2C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}$	$-C^{\alpha}_{\beta\gamma}$	0
3	0	$C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}$	0	$\frac{1}{2}C^{\alpha}_{\beta\varepsilon}C^{\varepsilon}_{\gamma\delta}$
	t	$(1-t)C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}$	$tC^{\alpha}_{\beta\gamma}$	$\frac{1-t^2}{2}C^{\alpha}_{\beta\varepsilon}C^{\varepsilon}_{\gamma\delta}$

Три первых строчки таблицы соответствуют трем специальным аффинным связностям без кривизны, либо без кручения на группе Ли.

Замечание 1. Эти связности начал изучать Эйзенхарт. Большинство результатов получили Картан и Схоутен [2], которые ввели термины : (+)-параллелизм, (-)-параллелизм и (0)-параллелизм. Соответствующие связности Эйзенхарт [3] назвал (+)-связность, (-)-связность и (0)-связность. Исследование связностей на группах Ли и в однородных пространствах является одним из направлений современной дифференциальной геометрии. Отметим, что при описании второй аффинной связности М.А. Акивисом [4, с.65, 66] есть две опечатки.

Теорема 1. *На группе Ли существует пучок аффинных связностей, содержащий три специальных связности, одна из которых без кручения, а две других без кривизны. Связности пучка, не являющиеся специальными, в общем (неабелевом) случае обладают кручением и кривизной.*

Замечание 2. Формы любой связности пучка θ^{α}_{β} линейно выражаются (10) через базисные формы ω^{γ} группы Ли G_r, поэтому уравнения стационарности точки $\omega^{\gamma} = 0$ влекут уравнения $\theta^{\alpha}_{\beta} = 0$, показывающие, что над группой G_r не возникает расслоения линейных реперов со связностью.

Выводы: 1) аффинные связности на группе Ли нельзя описать с точки зрения расслоений; 2) основную роль играют структурные уравнения аффинной связности (2,3), а не их не всегда возможная интерпретация в рамках теории расслоенных пространств; 3) понятие связности более широкое, чем его современное изложение с помощью расслоений.

5. Параллелизуемое многообразие. Рассмотрим более общее, чем группа Ли G_r, параллелизуемое многообразие Π_r со структурными уравнениями (1), где $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$-функции, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям [5,с.29-31]

$$dC^{\alpha}_{\beta\gamma} - C^{\alpha}_{\beta\delta}\omega^{\delta}_{\gamma} - C^{\alpha}_{\delta\gamma}\omega^{\delta}_{\beta} + C^{\delta}_{\beta\gamma}\omega^{\alpha}_{\delta} = C^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\omega^{\delta}, \tag{13}$$

причем

$$\omega^{\alpha}_{\beta} = C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma},\ C^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = 0,\ C^{\alpha}_{(\beta\gamma)\delta} = 0,\ C^{\alpha}_{\{\beta\gamma\delta\}} = C^{\varepsilon}_{\{\beta\gamma}C^{\alpha}_{|\varepsilon|\delta\}}.$$

Уравнения (13) можно записать короче

$$dC^{\alpha}_{\beta\gamma} = \hat{C}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\omega^{\delta}\ (\hat{C}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = C^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} + 3C^{\alpha}_{\{\beta|\varepsilon|}C^{\varepsilon}_{\gamma\delta\}}). \tag{14}$$

Для параллелизуемого многообразия Π_r остаются справедливы формулы (9-11), в которых согласно уравнениям (14) $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ - абсолютные инварианты. Внешнее дифференцирование равенств (10) с учетом уравнений (1, 3, 14) дает

$$[(1-t)^2 C^{\varepsilon}_{\beta\gamma}C^{\alpha}_{\varepsilon\delta} + R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} - (1-t)\ (C^{\alpha}_{\beta\varepsilon}C^{\varepsilon}_{\gamma\delta} - C^{\alpha}_{\beta\gamma\delta})]\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\delta} = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} &= (1-t)\{C^{\alpha}_{\beta\varepsilon}C^{\varepsilon}_{\gamma\delta} - C^{\alpha}_{\beta[\gamma\delta]} - (1-t)\ C^{\varepsilon}_{\beta[\gamma}C^{\alpha}_{\varepsilon\delta]}\} = \\ &= (t-1)\{\frac{t+1}{2}(C^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}C^{\varepsilon}_{\delta\beta} + C^{\alpha}_{\delta\varepsilon}C^{\varepsilon}_{\beta\gamma}) + C^{\alpha}_{\beta[\gamma\delta]}\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Из формул (11,15) следует

Теорема 2. *На параллелизуемом многообразии Π_r существует пучок аффинных связностей, содержащий лишь одну связность без кривизны (t=1) и одну связность без кручения (t=0).*

Замечание 3. На параллелизуемых многообразиях рассматривают три специальных аффинных связности (см., например, [6, с. 136]), обобщающие соответствующие связности группы Ли G_r. Построенный пучок содержит только две таких связности. При t=-1 по формуле (15) кривизна $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = -2C^{\alpha}_{\beta[\gamma\delta]}$. Если $C^{\alpha}_{\beta[\gamma\delta]} = 0$, то на параллелизуемом многообразии Π_r есть еще одна связность без кривизны.

Список литературы

1. *Картан Э.* Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М.: ИЛ, 1949. 384 с.
2. *Cartan E., Schouten J.A.* On the geometry of groupmanifold of simple and semi-simple groups // Acad. van Wetens. Proc. Amsterdam, 1926. N29. S. 803-815.
3. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. М.: ИЛ, 1947. 360 с.
4. *Акивис М.А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977. 84 с.
5. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998. 83 с.

Бишоп Р., Криттенден Р. Геометрия многообразий. М.: Мир, 1967. 336 с.

Yu.I. Shevchenko

BUNCHES OF AFFINE CONNECTIONS ON LEE'S GROUP AND PARALLELIZED MANIFOLD

By comparing of Lee's group structure equations and corresponding affinely connected space we introduce bunch of affine connections on Lee's group. Three affine connections of Cartan – Schouten – Eisenhart, two of which without curvature and one without torsion, belong to this bunch. The bunch of affine connections is extended on the parallelized manifold, generalizing Lee's group. In the general case generalized bunch includes only two special affine connections: one without curvature and one without torsion.

УДК 514.76

Е.П. Шустова

(Казанский государственный университет)

ПОЛНЫЙ ЛИФТ СВЯЗНОСТИ В КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ ПОРЯДКА k

Получены формулы, позволяющие эффективно вычислять компоненты полного лифта линейной связности в касательное расслоение порядка k.

Под касательным расслоением [1] k-того порядка T^kM_n пространства аффинной связности M_n будем понимать множество k-струй гладких отображений γ: $R \to M_n$, где R это вещественная прямая. Пусть отображение γ: $R \to M_n$, k-струя $j_0^k\gamma$ которого служит элементом расслоения T^kM_n, задано в локальных координатах формулами $x^i=x^i(t)$ $(i=\overline{1,n})$, причем при (t=0 получается рассматриваемая точка $x\in M_n$. То-