

М. Б. Банару¹, Г. А. Банару²

^{1, 2} Смоленский государственный университет
mihail.banaru@yahoo.com

¹ SPIN-код: 1392-5918, AuthorID: 128852

² SPIN-код: 9011-7084, AuthorID: 652570

doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-2

**О геодезических точках
уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразий
алгебры октав**

В данной статье изучаются уплощающиеся 6-мерные эрмитовы подмногообразия алгебры Кэли. Рассматриваются геодезические точки таких подмногообразий, то есть такие точки, в которых конфигурационный тензор подмногообразия обращается в нуль. Установлено, что в геодезических точках уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав обращаются в нуль и тензор Вейля конформной кривизны, и тензор конгармонической кривизны.

Ключевые слова: почти эрмитова структура, эрмитова структура, геодезическая точка, 6-мерное подмногообразие алгебры Кэли

1. Выдающегося американского математика Альфреда Грея по праву считают основателем эрмитовой геометрии 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли. Эта теория, заложенная его работами в 60-е годы прошлого века (см., например, [1; 2]), активно развивается и сейчас. Отметим, что в настоящее время большая часть выходящих работ связана с 6-мерными приближенно келеровыми подмногообразиями алгебры октав. Особенно «популярна» у геометров 6-мерная сфера, оснащен-

Поступила в редакцию 28.03.2026 г.

© Банару М. Б., Банару Г. А., 2026

ная канонической приближенно келеровой структурой. Обращаем внимание на две очень глубокие статьи о гиперповерхностях сферы S^6 , опубликованные в прошлом году [3; 4].

Исследований о 6-мерных подмногообразиях алгебры октав с эрмитовой (то есть интегрируемой почти эрмитовой) структурой выходит гораздо меньше, несмотря на то что и в этой области работали многие известные геометры, среди которых мы особо выделим отечественного специалиста В. Ф. Кириченко, получившего в конце прошлого века ряд очень значительных результатов (см., например, [5; 6]).

В данной статье мы рассматриваем геодезические точки уплощающихся 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли. Такие подмногообразия были введены в рассмотрение более 30 лет назад по инициативе В. Ф. Кириченко [7; 8]. Следует отметить, что именно ему принадлежала идея «переименовать» в геодезические те точки, которые до этого назывались точками уплощения (иначе термин «уплощающийся» употреблялся бы, например, в названии данной заметки в двух разных смыслах).

2. Напомним (см.: [1]), что почти эрмитовой структурой на многообразии M^{2n} четной размерности называется пара $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, где J — почти комплексная структура, а $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика. При этом J и $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^{2n}),$$

где $\mathfrak{X}(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на рассматриваемом многообразии M^{2n} . Многообразие с заданной на нем почти эрмитовой структурой называется *почти эрмитовым*. С каждой почти эрмитовой структурой $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ на многообразии M^{2n} связана так называемая фундаментальная форма, которая определяется равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^{2n}).$$

Интегрируемая почти эрмитова структура называется *эрмитовой*; в таком случае ее тензор Нейенхайса

$$N(X, Y) = \frac{1}{4} (J^2[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY])$$

обращается в нуль; келерову структуру определяет равенство

$$\nabla F = 0.$$

Давно известно, что так называемые 3-векторные произведения в алгебре октав $\mathbf{O} \equiv \mathbf{R}^8$ порождают на всяком 6-мерном ориентируемом подмногообразии $M^6 \subset \mathbf{O}$ почти эрмитову структуру. Соответствующая конструкция приводится в десятках статей; ее краткое и при этом аккуратное и строгое описание содержат статьи [2] и [5], а более подробное изложение можно найти в [7] или [9].

В работе [5] В. Ф. Кириченко получил структурные уравнения почти эрмитовой структуры на 6-мерном ориентируемом подмногообразии алгебры октав (в репере, адаптированном почти эрмитовой структуре):

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{ah[b} D_h^{c]} \omega_b \wedge \omega_c; \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ah[b} D_h^{c]} \omega^b \wedge \omega^c; \\ d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2} \delta_{bg}^{ah} D_{h[k} D_{j]}^g + \sum_{\varphi} T_{\hat{a}[k}^{\varphi} T_{j]b}^{\varphi} \right) \omega^k \wedge \omega^j, \end{aligned} \quad (1)$$

где через $\{\omega^k\}$ обозначены компоненты форм смещения, через $\{\omega_j^k\}$ — компоненты форм римановой связности.

Здесь и далее

$$\varphi = 7, 8; \quad a, b, c, d, g, h = 1, 2, 3;$$

$$\hat{a} = a + 3; \quad k, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Как в [6] и [7], $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$. При этом

$$\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc}^{123}, \quad \varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}^{abc}$$

— компоненты тензора Кронекера порядка три;

$$\delta_{bg}^{ah} = \delta_b^a \delta_g^h - \delta_g^a \delta_b^h$$

— кронекерова дельта второго порядка;

$$D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}}, \quad D_h^c = D_{h\hat{c}}, \quad D^h_c = D_{\hat{h}\hat{c}};$$

$$D_{cj} = \mp T_{cj}^8 + iT_{cj}^7, \quad D_{\hat{c}\hat{j}} = \mp T_{\hat{c}\hat{j}}^8 - iT_{\hat{c}\hat{j}}^7,$$

где $\{T_{kj}^\varphi\}$ — компоненты конфигурационного тензора (в терминологии Грея), или второй основной формы погружения подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ (см.: [7]). 6-мерное подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ называется уплощающимся (planar, иногда flattening), если оно содержится в гиперплоскости алгебры Кэли. Оказалось, что к числу уплощающихся относятся все 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры октав, которые полностью классифицированы В. Ф. Кириченко [5]. При этом нужно обязательно отметить, что известны примеры 6-мерных уплощающихся подмногообразий алгебры Кэли с почти эрмитовой структурой, отличной от келеровой [9—11].

Точка $p \in M^6$ называется геодезической (см.: [7; 8]), если все компоненты конфигурационного тензора в этой точке равны нулю. Оказалось, что в геодезических точках и только в них обращаются в нуль голоморфная секционная и голоморфная бисекционная кривизны эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ [8; 9].

Уже давно структурные уравнения (1) почти эрмитовой структуры на 6-мерном ориентируемом подмногообразии алгебры Кэли детализированы именно для эрмитовой структуры на уплощающемся $M^6 \subset \mathbf{O}$ [8]:

$$\begin{aligned}
 d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b; \\
 d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b; \\
 d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2} \delta_{bg}^{ah} D_{hd} D^{gc} + \sum_{\varphi} T_{\hat{a}\hat{c}}^{\varphi} T_{bd}^{\varphi} \right) \omega_c \wedge \omega^d.
 \end{aligned} \tag{2}$$

На основе уравнений (2) получены спектры важнейших тензоров уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли — тензора римановой кривизны, тензора Риччи, тензора Вейля конформной кривизны (см.: [12]), а также тензора конгармонической кривизны (см.: [13]). Напомним, что тензоры Вейля конформной кривизны W и тензор конгармонической кривизны Ch определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned}
 W_{ijkl} &= R_{ijkl} + \frac{1}{n-2} (ric_{ik} g_{jl} + ric_{jl} g_{ik} - \\
 &\quad - ric_{il} g_{jk} - ric_{jk} g_{il}) + \\
 &\quad + \frac{K}{(n-1)(n-2)} (g_{jk} g_{il} - g_{jl} g_{ik}), \\
 Ch_{ijkl} &= R_{ijkl} - \frac{1}{4} (ric_{jl} g_{ik} + ric_{ik} g_{jl} - \\
 &\quad - ric_{jk} g_{il} - ric_{il} g_{jk}).
 \end{aligned}$$

Здесь n — размерность многообразия, R — тензор римановой кривизны, ric — тензор Риччи, K — скалярная кривизна. Тензоры W и Ch обладают всеми классическими свойствами, которые присущи тензору римановой кривизны (см.: [14]).

3. Нами получены следующие результаты, связанные с геометрическими точками уплощающегося эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$.

Теорема 1. *Тензор Вейля конформной кривизны в геодезических точках уплощающегося 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли обращается в нуль.*

Теорема 2. *Тензор конгармонической кривизны в геодезических точках уплощающегося 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли обращается в нуль.*

Теорема 3. *Обращение в нуль скалярной кривизны в некоторой точке уплощающегося 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли влечет за собой обращение в этой точке в нуль тензора Вейля конформной кривизны и тензора конгармонической кривизны.*

Следовательно, уплощающееся эрмитово подмногообразие $M^6 \subset O$, состоящее только из геодезических точек, будет и конформно, и конгармонически плоским; эрмитова структура на таком многообразии неизбежно окажется келеровой. И конечно, обратим внимание на тот факт, что из теорем 1 и 2 вовсе не следует, что тензоры W и Ch обращаются в нуль только в геодезических точках (как голоморфная секционная и голоморфная бисекционная кривизны таких подмногообразий).

Интересными задачами, связанными с геодезическими точками уплощающихся эрмитовых подмногообразий алгебры октав, представляются следующие:

1) как влияют такие точки на почти контактную метрическую структуру (например, на какую-либо из важных и хорошо изученных структур, таких как косимплектическая, слабо косимплектическая, сасакиева и т.п.), индуцируемую на гиперповерхности уплощающегося эрмитова подмногообразия $M^6 \subset O$;

2) насколько наличие геодезических точек в уплощающемся 6-мерном эрмитовом подмногообразии алгебры октав приближает свойства такого подмногообразия к свойствам келеровых $M^6 \subset O$, которые полностью проклассифицированы и изучены детально?

Для продвижения в решении первой задачи, очевидно, можно использовать упомянутые в начале нашей заметки но-

вые работы [3] и [4], а также статьи [10; 11; 15—17]. Для решения второй задачи нами, казалось бы, накоплено немало материала — за 25 лет опубликовано более 20 работ об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли. Если совсем кратко подытожить уже полученные результаты об уплощающихся эрмитовых подмногообразиях $M^6 \subset \mathbf{O}$, то можно сказать, что все их свойства в той или иной степени близки свойствам келеровых подмногообразий алгебры октав. Однако все попытки получить результаты, связанные с классификацией таких подмногообразий, к данному моменту оказались не столь успешными, как достижения В. Ф. Кириченко для 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав в [5].

Список литературы

1. Gray A. Some examples of almost Hermitian manifolds // Illinois J. Math. 1966. Vol. 10, № 2. P. 353—366.
2. Gray A. Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products // Tôhoku Math. J. 1969. Vol. 21, № 4. P. 614—620.
3. Antić M., Kocić D. Hypersurfaces of the sphere $S^6(1)$ with four-dimensional nullity distribution // J. Geom. Phys. 2025. Vol. 213.
4. Al-Dayel I. Laplacian conditions and sphericity of hypersurfaces in the nearly Kähler 6-sphere // Mathematics. 2025. Vol. 13, № 16. P. 2673.
5. Кириченко В. Ф. Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Математика. 1980. № 8. С. 32—38.
6. Кириченко В. Ф. Эрмитова геометрия 6-мерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли // Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика. Механика. 1994. № 3. С. 6—13.
7. Банару М. Б. Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли : дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1993.
8. Банару М. Б., Кириченко В. Ф. Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Успехи математических наук. 1994. Т. 49, № 1. С. 205—206.

9. *Banaru M.B.* Hermitian geometry of 6-dimensional submanifolds of the Cayley algebra // *Sbornik: Mathematics*. 2002. Vol. 193, № 5—6. P. 635—648.
10. *Banaru M.B., Banaru G.A.* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // *Известия Академии наук Республики Молдова. Математика*. 2014. № 1 (74). P. 23—32.
11. *Банару М.Б., Банару Г.А.* Об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // *ДГМФ*. 2017. Вып. 48. С. 21—25.
12. *Банару Г.А.* О некоторых тензорах 6-мерных уплощающихся эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // *ДГМФ*. 2024. Вып. 55, № 2. С. 47—56.
13. *Banaru M.B., Banaru G.A.* On conharmonic curvature tensor of 6-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*. 2025. № 1 (107). P. 81—87.
14. *Кириченко В.Ф., Шихаб А.А.* О геометрии тензора конгармонической кривизны приближенно кэлеровых многообразий // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2010. Т. 16, № 2. С. 43—54.
15. *Банару М.Б.* О косимплектических гиперповерхностях 6-мерных кэлеровых подмногообразий алгебры Кэли // *Изв. вузов. Математика*. 2003. № 7. С. 59—63.
16. *Банару Г.А.* О несуществовании структуры Кенмоцу на *асп*-гиперповерхностях косимплектического типа кэлерова многообразия // *ДГМФ*. 2019. Вып. 50. С. 23—28.
17. *Банару М.Б., Банару Г.А.* О гиперповерхностях со структурой Кириченко — Ускорева в кэлеровых многообразиях // *Сибирские электронные математические известия*. 2020. Т. 17. С. 1715—1721.

Для цитирования: *Банару М.Б., Банару Г.А.* О геодезических точках уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав // *ДГМФ*. 2026. № 57 (1). С. 28—38. <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-1-2>.



MSC 2010: 53B35, 53B25

M. B. Banaru, G. A. Banaru
Smolensk State University
4, Przhevalskogo st., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-2

On geodesic points
of six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra

Submitted on March 28, 2026

In this short note, we study six-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra on which the so-called Brown — Gray three-fold vector cross products in the octave algebra induce a Hermitian structure. Such submanifolds of the octave algebra were introduced into consideration by the Russian geometer V. F. Kirichenko in the 90s of the last century. In such six-dimensional planar Hermitian submanifolds, we consider geodesic points, that is, points at which the configuration tensor of the submanifold vanishes. We establish that at geodesic points of six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the octave algebra, both the Weyl tensor of conformal curvature and the conharmonic curvature tensor vanish. We also establish that the vanishing of the scalar curvature of a six-dimensional planar submanifold of Cayley algebra implies the vanishing of both the Weyl tensor of conformal curvature and the conharmonic curvature tensor.

Two problems related to geodesic points of six-dimensional planar submanifolds of the octave algebra are formulated. Solutions, or significant advances in solving of these problems, appear entirely possible.

Keywords: almost Hermitian structure, Hermitian structure, geodesic point, six-dimensional submanifold of Cayley algebra

Referenses

1. Gray, A.: Some examples of almost Hermitian manifolds. Illinois J. Math., **10**:2, 353–366 (1966).
2. Gray, A.: Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products. Tôhoku Math. J., **21**:4, 614—620 (1969).
3. Antić, M., Kocić, D.: Hypersurfaces of the sphere $\mathbf{S}^6(\mathbf{1})$ with four-dimensional nullity distribution. J. Geom. Phys., 213 (2025).
4. Al-Dayel, I.: Laplacian conditions and sphericity of hypersurfaces in the nearly Kähler 6-sphere. Mathematics, **13**:16, 2673 (2025).
5. Kirichenko, V.F.: Classification of Kählerian structures, defined by means of three-fold vector cross products on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Izvestia Vuzov. Math., 8, 32—38 (1980).
6. Kirichenko, V.F.: Hermitian geometry of six-dimensional symmetric submanifolds of the Cayley algebra. Mosc. Univ. Math. Bull. Ser. 1. Math. Mekh., 3, 6—13 (1994).
7. Banaru, M.B.: Hermitian geometry of the 6-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Moscow State Pedagogical University (PhD thesis) (1993).
8. Banaru, M.B., Kirichenko, V.F.: The Hermitian geometry of the 6-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Russian Mathematical Surveys, **49**:1, 223—225 (1994).
9. Banaru, M.B.: Hermitian geometry of 6-dimensional submanifolds of the Cayley algebra. Sb. Math., 193:5—6, 635—648 (2002).
10. Banaru, M.B., Banaru, G.A.: A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra. Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova. Matematica, 1(74), 23—32 (2014).
11. Banaru, M.B., Banaru, G.A.: On planar 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. DGMF, 48, 21—25 (2017).
12. Banaru, G.A.: On some tensors of six-dimensional Hermitian planar submanifolds of Cayley algebra. DGMF, **55**:2, 47—56 (2024).
13. Banaru, M.B., Banaru, G.A.: On conharmonic curvature tensor of 6-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra. Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova. Matematica, 1(107), 81—87 (2025).

14. *Kirichenko, V. F., Shihab, A. A.*: On the geometry of conharmonic curvature tensor for nearly Kähler manifolds. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, **16**:2, 43—54 (2010).

15. *Banaru, M. B.*: On skew-symplectic hypersurfaces of six-dimensional Kählerian submanifolds of the Cayley algebra. *Russian Math. (Izvestia Vuzov)*, **47**:7, 60—63 (2003).

16. *Banaru, G. A.*: On nonexistence of Kenmotsu structure on acm-hypersurfaces of cosymplectic type of a Kählerian manifold. *DGMF*, 50, 23—28 (2019).

17. *Banaru, M. B., Banaru, G. A.*: On hypersurfaces with Kirichenko — Uskorev structure in Kählerian manifolds. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 17, 1715—1721 (2020).

For citation: Banaru, M. B., Banaru, G. A.: On geodesic points of six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra. *DGMF*, 57 (1), 28—38 (2026). <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-1-2>.



SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE ([HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/))