ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.11 1980

Л.Г.Корсакова

О РАССЛОЯЕМЫХ ПАРАХ КОНГРУЭНЦИЙ КОНИК, КАСАЮЩИХСЯ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СВОИХ ПЛОСКОСТЕЙ

В пространстве P_3 рассматривается невырожденная конгруэнция пар коник C_1 и C_2 [1], не лежащих в одной плоскости и касающихся линии пересечения своих плоскостей в различных точках A_1 и A_2, причем плоскости коник описывают двумерные многообразия. Конгруэнция пар коник такого типа названа парой A [2]. Вводится понятие оснащенных пар A. Показано, что расслояемая пара A является подклассом оснащенной пары A. Для расслояемых пар A доказана классификационная теорема.

Отнесем пару A к реперу $R=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, где вершины A_3 и A_4 выбраны так, чтобы треугольники $A_1A_2A_4$ и $A_1A_2A_3$ были автополярными треугольниками второго рода соответственно относительно коник C_1 и C_2. Будем предполагать, что прямые A_3A_4, ассоциированные с парой A, образуют конгруэнцию. Инфинитезимальные перемещения репера R определяются деривационными формулами $dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4)$, причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры $\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta$ и условию $\omega_\alpha^\alpha=0$. Символом δ обозначается дифференцирование по вторичным параметрам и буквами π_α^β значение форм ω_α^β при фиксированных первичных параметрах. Уравнения коник C_1, C_2 и система пфаффовых уравнений пары A записываются в виде:

$$(x^2)^2-2x^1x^4=0,\ x^3=0;\ (x^1)^2-2x^2x^3=0,\ x^4=0, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\omega_i^j=\Gamma_i^{jk}\omega_k,\ \omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\omega_k,\ \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,\ \omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k,\\ \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k,\ \omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k,\ \Omega_1=a^k\omega_k,\ \Omega_2=b^k\omega_k.\end{gathered} \tag{2}$$

(Здесь обозначено: $\omega_i^4=\omega_i$; $\omega_2^2+\omega_3^3-2\omega_1^1=\Omega_1$, $\omega_1^1+\omega_4^4-2\omega_2^2=\Omega_2$; $i,j,k=1,2$; $i\neq j$ и по этим индексам суммирование не производится).

О п р е д е л е н и е 1. Пара A называется оснащенной, если на каждой конике C_i конгруэнции (C_i) пары A задана инвариантная точка, описывающая секущую гладкую поверхность.

Оснащенные пары A определяются уравнениями (2), уравнениями

$$\rho d\rho+\rho^2(\omega_1^1-\omega_2^2)-\tfrac{1}{2}\rho^3\omega_1^2-\rho(\omega_4^2-2\omega_2^1)+2\omega_4^1=p^k\omega_k, \tag{3}$$

$$\sigma d\sigma+\sigma^2(\omega_2^2-\omega_1^1)-\tfrac{1}{2}\sigma^3\omega_2^1-\sigma(\omega_3^1-2\omega_1^2)+2\omega_3^2=c^k\omega_k \tag{4}$$

и их замыканиями, где ρ и σ -это параметры, задающие оснащающие точки $P=\rho A_2+\frac{1}{2}\rho^2A_1+A_4$, $M=\sigma A_1+\frac{1}{2}\sigma^2A_2+A_3$ соответственно на кониках C_1 и C_2.

Замыкая уравнения (3),(4) и фиксируя первичные параметры, получим:

$$\begin{gathered}\delta p^1=p^1(\pi_4^4+2\pi_2^2-3\pi_1^1),\ \delta p^2=p^2(\pi_2^2+\pi_4^4-2\pi_1^1),\\ \delta c^1=0,\ \delta c^2=c^2(\pi_4^4+2\pi_1^1-3\pi_2^2).\end{gathered} \tag{5}$$

Отсюда следует, что величины p^i, c^2 -относительные инварианты, c^1 -абсолютный инвариант.

О п р е д е л е н и е 2. Оснащенная пара A называется инцидентно-оснащенной, если касательные плоскости к поверхностям, которые описывают оснащающие точки, инцидентны прямой A_3A_4 конгруэнции (A_3A_4).

Инцидентно-оснащенная пара A характеризуется системой (2) и уравнениями

$$\rho d\rho + \rho^2(\omega_1^1 - \omega_2^2) - \frac{1}{2}\rho^3\omega_1^2 - \rho(\omega_4^2 - 2\omega_2^1) + 2\omega_4^1 = 0, \quad (6)$$

$$\sigma d\sigma + \sigma^2(\omega_2^2 - \omega_1^1) - \frac{1}{2}\sigma^3\omega_2^1 - \sigma(\omega_3^1 - 2\omega_1^2) + 2\omega_3^2 = 0. \quad (7)$$

О п р е д е л е н и е 3. Инцидентно-оснащенная пара A называется односторонне расслояемой от конгруэнций (C_1) и (C_2) к конгруэнции (A_3A_4), если уравнения (6) и (7) вполне интегрируемы.

Можно показать, как это сделатнов [3], что свойство односторонней расслояемости для пары A есть внутреннее свойство пары, не зависящее от оснащения.

О п р е д е л е н и е 4. Односторонне расслояемая пара A называется расслояемой, если: 1/пара прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4) расслояема в направлении от (A_1A_2) к (A_3A_4); 2/прямая A_3A_4 не инцидентна касательным плоскостям к поверхностям (A_i).

Т е о р е м а I. Существует три проективно неэквивалентных класса расслояемых пар A -пары A^1, A^2, A^3, каждый из которых определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Расслояемая пара A характеризуется системой квадратичных уравнений:

$$\omega_i^3 \wedge \omega_3^j + \omega_i \wedge \omega_4^j = 0, \quad \omega_3^1 \wedge \omega_2^1 = 0, \quad \omega_4^2 \wedge \omega_1^2 = 0, \quad (8)$$

$$\Omega_1 \wedge \omega_3^1 - 2\omega_3^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_3^4 \wedge \omega_4^1 = 0, \quad \Omega_1 \wedge \omega_3^2 + \omega_3^1 \wedge \omega_1^2 + \omega_3^4 \wedge \omega_4^2 = 0,$$

$$\omega_3^2 \wedge (\omega_3^1 - 2\omega_1^2) = 0, \quad \omega_2 \wedge \omega_4^2 + \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 = 0,$$

$$\Omega_2 \wedge \omega_4^2 - 2\omega_4^1 \wedge \omega_1^2 + \omega_4^3 \wedge \omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^1 \wedge (\omega_4^2 - 2\omega_2^1) = 0,$$

$$\Omega_2 \wedge \omega_4^1 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_4^3 \wedge \omega_3^1 = 0.$$

Из условия 2/ определения 4 следует, что $\omega_i^j \neq 0$. Учитывая, что линейчатое многообразие (A_3A_4) -конгруэнция, получим, что существует три проективно неэквивалентных класса расслояемых пар A (назовем их соответственно парами A^1, A^2, A^3):

I. $\omega_3^1 \omega_3^2 \omega_4^1 \omega_4^2 \neq 0$;

II. $\omega_3^2 = 0, \quad \omega_3^1 \omega_4^1 \omega_4^2 \neq 0$;

III. $\omega_3^2 = \omega_4^1 = 0$.

Докажем, например, теорему существования для класса A^3. Осуществляя переход к новому базису ω_3^1, ω_4^2 ($\omega_3^1 \wedge \omega_4^2 \neq 0$ поскольку (A_3A_4) -конгруэнция) и обозначая $\omega_3^1 = \omega^1, \omega_4^2 = \omega^2$, из системы (8) будем иметь систему пфаффовых уравнений пары A^3:

$$\omega_i^j = \Lambda_i^j \omega^j, \quad \omega_3^2 = \omega_4^1 = 0, \quad \omega_2^3 = \Lambda_2^3 \omega^1, \quad \omega_1 = \Lambda_1^4 \omega^2,$$

$$\omega_1^3 = \Lambda_{11}^3 \omega^1 + \Lambda_{12}^3 \omega^2, \quad \omega_2 = -\Lambda_{12}^3 \omega^1 + \Lambda_2^4 \omega^2, \quad (9)$$

$$\Omega_1 = \nu \omega^1, \quad \Omega_2 = \psi \omega^2, \quad \omega_3^4 = \Lambda_3^4 \omega^2 - \Lambda_1^2 \omega^1,$$

$$\omega_4^3 = \Lambda_4^3 \omega^1 - \Lambda_2^1 \omega^2.$$

Из анализа системы (9) имеем:

$$s_1 = 10, \quad s_2 = 1, \quad Q = N = 12.$$

Следовательно произвол существования пар A^3 -одна функция двух аргументов. Аналогично теорема доказывается и для классов A^1, A^2.

Т е о р е м а 2. Пары A^3 обладают следующими свойствами: 1/плоскости $(A_iA_3A_4)$ описывают одномерное многообразие; 2/поверхности (A_3) и (A_4) -торсы; 3/точка $A_4(A_3)$ является двойной точкой гомографии [4] для пары поверхностей (A_2) и (A_3) $((A_1)$ и $(A_4))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Имеем:

$$d[A_iA_3A_4]\Big|_{\omega^j=0} = (\omega_i^i + \omega_3^3 + \omega_4^4)[A_iA_3A_4],$$

то есть, плоскости $(A_i A_3 A_4)$ неподвижны вдоль линий $\omega^j = 0$.

2/Асимптотические линии на поверхностях (A_3) и (A_4) определяются соответственно уравнениями:

$$\Lambda_3^4 (\omega^2)^2 = 0, \quad \Lambda_4^3 (\omega^1)^2 = 0,$$

значит поверхности (A_3) и (A_4) -торсы.

3/Имеем:

$$dA_2\big|_{\omega^1=0} = \omega_2^2 A_2 + \omega_2 A_4; \; dA_1\big|_{\omega^2=0} = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^3 A_3,$$

$$dA_3\big|_{\omega^1=0} = \omega_3^3 A_3 + \omega_3^4 A_4; \; dA_4\big|_{\omega^2=0} = \omega_4^4 A_4 + \omega_4^3 A_3,$$

что и требовалось доказать.

Список литературы

1. Малаховский В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.- Труды геом.семинара, ВИНИТИ АН СССР, М., 1969, 2, с.179-206.

2. Корсакова Л.Г. Расслояемые пары конгруэнций коник, касающихся линии пересечения своих плоскостей. -В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.4. Калининград, 1974, с.44-64.

3. Корсакова Л.Г. О некоторых характеристиках расслояемых пар конгруэнций фигур.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.8, Калининград, 1977, с.18-31.

4. Фиников С.П. Асимптотически сопряженные двойные линии Ермолаева.- Уч.зап.Моск.гос.пед.ин-та, 1951, № 16, вып.3, с.235-260.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.11 1980

М.В.Кретов

О КОМПЛЕКСАХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КВАДРИК В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном аффинном пространстве A_3 рассматриваются комплексы (трехпараметрические семейства) K_3 центральных квадрик (эллипсоидов). Рассмотрен специальный класс комплексов K_3, для которого изучено характеристическое многообразие. Найдены характеристическое и фокальное многообразия нескольких подклассов комплексов K_3 в случае, когда многообразие центров вырождается в точку. Исследован комплекс K_{32} эллипсоидов $\widetilde{Q}$, центр которых описывает поверхность Φ, причем аффинная нормаль в каждой точке поверхности Φ сопряжена относительно эллипсоида $\widetilde{Q}$ касательной плоскости.

§1. Построение репера

Отнесем комплекс K_3 эллипсоидов к реперу $R = \{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Деривационные формулы репера R запишутся в виде

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j, \quad (i, j, k = 1,2,3), \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа ω^i, ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad \mathcal{D}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \tag{1.2}$$

Уравнение эллипсоида $\widetilde{Q}$ имеет вид

$$F \equiv a_{ij} x^i x^j + a_i x^i - 1 = 0. \tag{1.3}$$