которой надо присоединить $A_1=A_2\equiv A$, $H_1=H_2\equiv H$. Получим $t^2=1$ и, следовательно, $t=1$ (или $t=-1$). Тогда $\rho_1=\rho_2$, $\rho_1'=\rho_2'$. Видно, что равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых пары и по теореме 3 из [1] прямые конгруэнции общих перпендикуляров пар дополнительных конгруэнций пересекают соответствующие прямые этой пары в центрах.

2) Если у пар $\tilde{T}'$ конгруэнций прямые конгруэнции общих перпендикуляров пар дополнительных конгруэнций пересекают соответствующие прямые в центрах, то по теореме 3 из [1] эти прямые есть пары I-го типа и тогда $\rho_1=\rho_2$, $\rho_1'=\rho_2'$. В этом случае в системе уравнений (I):

$$A=\Omega_{13}\frac{\rho_1+\rho_1'}{h_1-h_2}+H, \qquad A=\Omega_{23}\frac{\rho_1+\rho_1'}{h_1-h_2}+H.$$

Приравнивая правые части, в силу независимости Ω_{a3} получим $\rho_1+\rho_1'=0$, $\rho_2+\rho_2'=0$, откуда следует, что прямые конгруэнции общих перпендикуляров пары T'' конгруэнций пересекают эти прямые в центрах.

Заметим, что рассмотренные пары имеют равные произведения абсцисс фокусов.

Т е о р е м а 6. Если из трех нижеуказанных требований на соответствующие прямые пары T'' конгруэнций выполнены два требования, то имеет место и третье: а) фокальные расстояния соответствующих прямых пары конгруэнций равны между собой; б) постоянно расстояние между соответствующими прямыми; в) постоянен угол между соответствующими прямыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) Пары T'' конгруэнций определяются системой уравнений (2). Если предположить, что выполнены условия а) и б), то $\rho_1=\rho_2$, $h_1-h_2=\mathrm{const}$, т.е. $H_1=H_2\equiv H$. Тогда из системы уравнений (2) имеем:

$$A_1-A_2=H_1\frac{\rho_2}{\rho_1}-H_2\frac{\rho_1}{\rho_2}=H\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{\rho_1\rho_2}=0,$$

откуда $A_1=A_2\equiv A$. Следовательно, постоянен угол между соответствующими прямыми, т.е. выполнено условие в).

2) Предположим, что выполнены условия а) и в). Тогда $A_1=A_2\equiv A$, $\rho_1=\rho_2$. Из первых двух уравнений системы (2) имеем: $H_1=H_2$, т.е. выполнено условие б).

3) Допустим, что выполнены условия б) и в). Тогда имеем

пару конгруэнций $\tilde{T}'$. Такие пары определены системой уравнений (I) при условиях $A_1=A_2$, $H_1=H_2$. Тогда имеем $\rho_1=\rho_2$, $\rho_1'=\rho_2'$. Следовательно, выполняется условие равенства фокальных расстояний соответствующих прямых пары.

Библиографический список

I. Р е д о з у б о в а О.С. Пары Т конгруэнций с данным расположением конгруэнции общих перпендикуляров // Дифференциальная геометрия многообразий фигур : Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1990. Вып.21. С.86-90.

УДК 514.76

О ПРОЕКТИВНЫХ СУБМЕРСИЯХ И ИММЕРСИЯХ В ЦЕЛОМ

С.Е.С т е п а н о в

(Владимирский педагогический институт)

Локальная теория проективных диффеоморфизмов изложена в известной монографии [1]. В последнее время, развивая локальную теорию проективных отображений, авторы сняли требования равенства размерностей в отображении многообразий [2], [3] и, более того, ограничение на ранг отображения [4]. В настоящей работе рассматривается глобальный аспект новой теории, намеченный нами в статье [5].

1. Пусть (M,g) – риманово многообразие размерности n со связностью Леви-Чивита ∇. Гладкий путь $\gamma: J\subset R\to(M,g)$ называется геодезической, если его касательное векторное поле $\dot\gamma$ параллельно, т.е. $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=0$. Из определения следует, что либо геодезическая регулярна во всех своих точках, т.е. $\dot\gamma\neq 0$, либо геодезическая вырождается в точку. Предгеодезической называется гладкий путь γ, который параметризацией может быть сделан геодезической.

Полагаем (M',g') римановым многообразием размерности n' со связностью Леви-Чивита ∇'. Гладкое отображение $f:(M,g)\to(M',g')$ называется проективным, если для каждой предгеодезической γ многообразия (M,g) ее образ $f(\gamma)$ будет предгеодезической многообразия (M',g').

Пусть $n'<n$, а в качестве гладкого проективного отобра-

13 Зак. 2036

жения f выступает субмерсия $\pi:(M,g)\to(M',g')$. Тогда каждая предгеодезическая (или геодезическая), являющаяся интегральной кривой распределения $\ker\pi_*$, будет иметь образом точку многообразия (M',g'), что не противоречит определению проективного отображения. Кроме того, само $\ker\pi_*$ и его ортогональное дополнение $\ker\pi_*^{\perp}$ будут [4] интегрируемыми с вполне геодезическими и омбилическими соответственно интегральными многообразиями. В этом случае (M,g) является [6] почти полуприводимым римановым многообразием. Более того, справедлива следующая

Т е о р е м а I. Для того, чтобы риманово многообразие (M,g) допускало проективную субмерсию, необходимо и достаточно, чтобы оно было почти полуприводимым.

Обозначим через K_M и $K_{M'}$, Ric_M и $Ric_{M'}$ секционные кривизны и кривизны Риччи многообразий (M,g) и (M',g') соответственно, тогда можно сформулировать основное утверждение.

Т е о р е м а 2. Пусть $\pi:(M,g)\to(M',g')$ – проективная субмерсия. Если выполняется одно из следующих условий:

а) $K_M\geqslant 0$ и (M,g) – полное;

б) $K_M\leqslant 0$ и (M,g) – компактное ориентированное,

то $\ker\pi_*$ и $\ker\pi_*^{\perp}$ – вполне геодезические слоения и локально (M,g) – риманово произведение их слоев.

С л е д с т в и е. Пусть $\pi:(M,g)\to(M',g')$ – проективная субмерсия и $\dim M'=\dim M-1$. Если выполняется одно из следующих условий:

а) $Ric_M\geqslant 0$ и (M,g) – полное;

б) $Ric_M\leqslant 0$ и (M,g) – компактное ориентированное,

то $\ker\pi_*$ и $\ker\pi_*^{\perp}$ – вполне геодезические слоения и локально (M,g) – риманово произведение их слоев.

Пусть теперь $n<n'$, а в качестве гладкого проективного отображения выступает иммерсия (погружение) $\tau:(M,g)\to(M',g')$. Тогда имеет место

Т е о р е м а 3. Пусть $\tau:(M,g)\to(M',g')$ – проективная иммерсия. Если $K_M\leqslant 0$ и (M,g) – компактное многообразие, то τ – аффинное отображение.

2. Пусть $(P,\check g)$ и $(H,\hat g)$ – два римановых многообразия размерностей $n-n'$ и n' соответственно, $M=P\times H$ – их произведение, p и h – канонические проекции на сомножители P и

H, $\varphi: M\to(0,\infty)$ – положительная функция. Почти полуприводимым римановым многообразием называется многообразие $M=P\times H$, которое оснащено метрикой g, определяемой по следующему правилу:

$$g(X,Y)=\check g(p_*X,p_*Y)+\varphi(x)\,\hat g(h_*X,h_*Y),$$

где $x\in M$ и $X,Y\in T_xM$. Как это доказано в [6], для каждой точки $y\in H$ слой $h^{-1}(y)$ вполне геодезичен, а для каждой $z\in P$ слой $p^{-1}(z)$ вполне омбиличен. Тогда, как уже отмечалось выше, риманово многообразие (M,g), допускающее проективную субмерсию, является почти полуприводимым. С другой стороны, каждое почти полуприводимое многообразие $(P\times H,\ \check g+\varphi\hat g)$ допускает проективную субмерсию, которой является вторая проекция h: $P\times H\to H$. Действительно, в этом случае предгеодезические P спроектируются в точки, предгеодезические H – в себя, а трансверсальные предгеодезические многообразия $P\times H$ спроектируются, как это доказано в [6], в предгеодезические H. Это и доказывает первое утверждение.

3. В этом пункте докажем второе и третье утверждения. Пусть (M,g) – компактное многообразие с двумя дополнительными ортогональными вполне геодезическим $\ker\pi_*$ и вполне омбилическим $\ker\pi_*^{\perp}$ слоениями, тогда [7]

$$\int_M \Big(\sum_{a=1}^{n'}\sum_{\alpha=n'+1}^{n} K_M(e_a,e_\alpha)-n'(n'-1)\,g(\xi,\xi)\Big)\,dv=0,$$

где $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ – ортонормированный базис T_xM в произвольной точке $x\in M$ такой, что

$$\ker\pi_{*x}^{\perp}=\mathrm{Span}\{e_1,\dots,e_{n'}\}\quad\text{и}\quad\ker\pi_{*x}=\mathrm{Span}\{e_{n'+1},\dots,e_n\}$$

и ξ поле векторов средней кривизны слоения $\ker\pi_*^{\perp}$. Для $n'=n-1$ формула принимает следующий вид:

$$\int_M \big(Ric(X)-(n-1)(n-2)\,g(\xi,\xi)\big)\,d\sigma=0,$$

где X – единичное векторное поле, ортогональное $\ker\pi_*^{\perp}$.

Полагаем $K_M\leqslant 0$, тогда из первой формулы последует, что либо $\xi=0$ и $\ker\pi_*^{\perp}$ – вполне геодезическое слоение, либо $n'=1$, т.е. $\mathrm{Codim}\ker\pi_*=1$. В первом случае (M,g) локально является римановым произведением слоев $\ker\pi_*$ и $\ker\pi_*^{\perp}$. Во втором случае из условия $K_M(X,V)=0$ для $X\in\ker\pi_*$ и $V\in\ker\pi_*^{\perp}$ на основании теоремы Танно [8] выводим, что V – параллельное на (M,g) векторное поле. Откуда опять следует локальная приводимость (M,g).

Полагаем теперь $Ric_M \leq 0$, тогда из второй формулы следует, что либо $\mathcal{E}=0$, либо $n=2$, т.е. $\operatorname{codim}\ker\pi_* = 1$. В обоих случаях (M,g) будет локально римановым произведением слоев $\ker \pi_*$ и $\ker \pi_*^{\perp}$.

С другой стороны, при $K_M \geq 0$ согласно основной теореме работы [9] полное многообразие (M,g) будет локальным римановым произведением слоев $\ker\pi_*$ и $\ker\pi_*^{\perp}$ только потому, что одно из слоений $\ker\pi_*$ – вполне геодезическое. В той же работе [9] есть следствие, согласно которому при $Ric_M \geq 0$ полное многообразие (M,g) будет локальным произведением слоев $\ker\pi_*$ и $\ker\pi_*^{\perp}$ только потому, что $\operatorname{codim}\ker\pi_*^{\perp}=1$ и $\ker\pi_*$ – состоит из геодезических. Последнее доказывает утверждение (а) следствия.

4. Рассмотрим проективную иммерсию $\tau:(M,g)\to(M',g')$. Тогда $\operatorname{rank}\tau_* = \dim M$ всюду на (M,g), т.е. τ будет проективным отображением максимального ранга. Согласно [4] тензорное поле $\overset{*}{g}=\tau^* g'$ удовлетворяет уравнению

$$(\nabla_Z \overset{*}{g})(X,Y) = 2\omega(Z)\overset{*}{g}(X,Y) + \omega(X)\overset{*}{g}(Z,Y) + \omega(Y)\overset{*}{g}(X,Z)$$

для любых векторных полей X, Y и Z на (M,g). При этом $G=\det\|\overset{*}{g}\|\neq 0$. Обозначим через G^{ij} алгебраическое дополнение элемента $\overset{*}{g}_{ij}$ матрицы $\|\overset{*}{g}_{\times}\|$, тогда

$$X(G) = G^{ij}\nabla_X \overset{*}{g}_{ij},$$

что на основании приведенного уравнения дает

$$X(\ln G) = 2(n+1)\,\omega(X).$$

Следовательно, $\omega = \operatorname{grad}\varphi$, где $\varphi=[2(n+1)]^{-1}\ln G$. Тензорное поле $A=e^{-3\varphi}\overset{*}{g}$ удовлетворяет в этом случае уравнению $(\nabla_X A)(X,X)=0$. На компактном римановом многообразии (M,g) неположительной секционной кривизны такое тензорное поле параллельно [10, с.613]. В нашем случае равенство $\nabla A=0$ приводит к условию $\varphi=\mathrm{const}$, которое означает, что $\tau:(M,g)\to(M',g')$ – аффинное отображение.

Библиографический список

1. С и н ю к о в Н.С. Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979.

2. Nomidzu K. Pinkall V. On the geometry of projective immersion // J. Math. Soc. Japan. 1989. Vol. 41. N4. P. 607–623.

3. Podestá F. Projective submersions // Bull. Austral. Math Soc. 1991. Vol. 43. N2. P. 251–256.

4. Nore T. Second fundamental form of a map // Ann. mat pur. ed appl. 1987. N146. P. 281–310.

5. С т е п а н о в С.Е. Римановы структуры почти произведения и отображения постоянного ранга // Геометрия и анализ/ Кемеровский ун-т. Кемерово, 1991. С.39–41.

6. К р у ч к о в и ч Г.И. Признаки почти полуприводимых римановых пространств // Тр. семинара по вектор. и тензор. анализу. М., 1966. Вып. XIII. С.399–406.

7. С т е п а н о в С.Е. Об одном классе римановых структур почти произведения // Изв. вузов. Математика. 1989. № 7. С.40–46.

8. Tanno S. A theorem on totally geodesic foliations and its applications // Tensor, N.S. 1972. Vol. 24. P. 116–122.

9. Brito F., Walczak P. Totally geodesic foliations integrable normal bundles // Bol. Soc. Bras. Mat. 1989. Vol. 17. N1. P. 41–46.

10. Б е с с е А. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990. Т.2.

УДК 514.75

К ГЕОМЕТРИИ ПАРЫ n-ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E_{n+m}

М.А.Ч е ш к о в а

(Алтайский государственный университет)

Диффеоморфизм $f: M\to M'$ n-поверхностей в E_{n+m} индуцирует на M метрику $\bar{g}(X,Y)=(dfX,dfY)$. Изучается тензор деформации связностей Леви-Чивита исходной и индуцируемой метрики на M.

Пусть M, M' – гладкие n-поверхности в E_{n+m}, $f: M\to M'$ – диффеоморфизм, $p\in M$, $q=f(p)\in M'$. Перенесем векторы $(dfX)_q$, где $X_p\in T_pM$, параллельно в точки $p=f^{-1}(q)$, обозначим их $(dfX)_p$ и разложим на касательные и нормальные составляющие. Имеем

$$\underline{d}fX = FX + \omega X, \tag{I}$$