Для $b_1+1=0$ получаем аналогичный результат. Следовательно, существуют два и только два класса конгруэнций O_2^*, каждый из которых определяется с произволом двух функций одного аргумента.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. О конгруэнциях орициклов и орисфер в пространстве Лобачевского // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1990. Вып.21. С.47-50.

УДК 514.75

СЕМЕЙСТВА ОСНАЩЕННЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МНОГОМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Н.В.М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)

Исследуются n-параметрические семейства $\hat{\Pi}_n$ невырожденных проективных преобразований $\hat{\pi}: \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, отображающих заданную точку $X_0 \in \mathcal{P}_n$ в заданную точку $Y_0 \in \mathcal{P}_n$, причем точки X_0 и Y_0 описывают n-мерные области $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ в пространстве $\mathcal{P}_n$. Построены поля геометрических объектов на многообразии $\hat{\Pi}_n$, дана их геометрическая характеристика. Найдены нормализации пространства $\mathcal{P}_n$ и определяемые ими аффинные связности.

§ 1. Поля геометрических объектов на семействе $\hat{\Pi}_n$

Отнесем пространство $\mathcal{P}_n$ к реперу $\{A_{J'}\}$, где $A_0 \equiv X_0$, $A_n = Y_n$. Так как в окрестности $\mathcal{U}$ точки A_0 однородная проективная координата $\tilde{X}^0$ точки $X \in \mathcal{U}$ отлична от нуля, а в окрестности $\hat{\pi}(\mathcal{U})$ точки $Y_0 \in \hat{\pi}(\mathcal{U})$ однородная проективная координата $\tilde{Y}^n$ точки $Y \in \hat{\pi}(\mathcal{U})$ также отлична от нуля, то можно в этих окрестностях ввести неоднородные координаты X^J, Y^α, положив

$$X^J = \frac{\tilde{X}^J}{\tilde{X}^0}, \quad Y^\alpha = \frac{\tilde{Y}^\alpha}{\tilde{Y}^n} \qquad (I, J, K = \overline{1,n};\ \alpha,\beta,\gamma = \overline{0,n-1}).$$

Тогда проективное преобразование $\hat{\pi} \in \hat{\Pi}_n$ определится соотношениями:

$$Y^\alpha = \frac{\hat{M}^\alpha_J X^J}{1-\hat{P}_K X^K}. \tag{1.1}$$

При инфинитезимальном изменении репера $\{\bar{A}_{J'}\} \to \{\bar{A}_{J'} + d\bar{A}_{J'}\}$ неоднородные проективные координаты X^J, Y^α преобразуются по закону:

$$X^J \to X^J - X^K\Omega^J_K + X^J X^K \Omega^0_K + X^J\Omega^0_0 - \Omega^J, \tag{1.2}$$

$$Y^\alpha \to Y^\alpha - Y^\beta\Omega^\alpha_\beta + Y^\alpha Y^\beta \Omega^n_\beta + Y^\alpha\Omega^n_n - \Omega^\alpha_n. \tag{1.3}$$

Сравнивая формулы (1.2), (1.3) с левыми частями уравнений (1.3) работы [1], убеждаемся, что семейство Π_n оснащенных коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to \rho_n$ превращается в семейство $\hat{\Pi}_n$ оснащенных проективных преобразований $\hat{\pi}: \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$. При этом надо осуществить следующую замену:

$$x^i \to Y^\alpha, \ \omega^k_i \to \Omega^\beta_\alpha, \ \omega^0_i = \Omega^n_\alpha, \ \omega^i_0 = \Omega^\alpha_n, \tag{1.4}$$

а над компонентами соответствующих объектов будем ставить знак "$\wedge$". Тогда (см. [1], (1,6)) система уравнений Пфаффа семейства $\hat{\Pi}_n$ запишется в виде:

$$\begin{cases} \Omega^\alpha_n = \hat{\lambda}^\alpha_J \Omega^J, \quad \nabla \hat{M}^\alpha_J = \hat{M}^\alpha_{JK}\Omega^K, \\ \nabla \hat{P}_J + \Omega^0_J - \hat{M}^\alpha_J \Omega^n_\alpha = \hat{P}_{JK}\Omega^K, \end{cases} \tag{1.5}$$

где

$$\begin{cases} \nabla \hat{M}^\alpha_J = d\hat{M}^\alpha_J - \hat{M}^\alpha_K \Omega^K_J + \hat{M}^\beta_J \Omega^\alpha_\beta + \hat{M}^\alpha_J(\Omega^0_0 - \Omega^n_n), \\ \nabla \hat{P}_J = d\hat{P}_J - \hat{P}_K\Omega^K_J + \hat{P}_J\Omega^0_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Продолжая систему (1.5), получим:

$$\begin{cases} \nabla \hat{\lambda}^\alpha_J = \hat{\lambda}^\alpha_{JK}\Omega^K, \ \Delta\hat{\lambda}^\alpha_{JK} = \hat{\lambda}^\alpha_{JKL}\Omega^L, \\ \Delta \hat{M}^\alpha_{JK} = \hat{M}^\alpha_{JKL}\Omega^L, \ \Delta\hat{P}_{JK} = \hat{P}_{JKL}\Omega^L, \end{cases} \tag{1.7}$$

где

$$\begin{cases} \Delta\hat{\lambda}^\alpha_{JK} = \nabla\hat{\lambda}^\alpha_{JK} + \hat{\lambda}^\alpha_{(J}\Omega^0_{K)} - \hat{\lambda}^\alpha_{(J}\hat{\lambda}^\beta_{K)}\Omega^n_\beta, \\ \Delta\hat{M}^\alpha_{JK} = \nabla\hat{M}^\alpha_{JK} + \hat{M}^\alpha_{(J}\Omega^0_{K)} - \hat{M}^{(\alpha}_J\hat{\lambda}^\beta_K\Omega^n_\beta, \\ \Delta\hat{P}_{JK} = \nabla\hat{P}_{JK} + \hat{P}_{(J}\Omega^0_{K)} - \hat{M}^\alpha_{JK}\Omega^n_\alpha, \end{cases} \tag{1.8}$$

а круглые скобки означают циклирование по соответствующим индексам. Здесь величины „$\hat{\lambda}$" симметричны по паре нижних индексов, а величины „$\hat{M}$" и „$\hat{P}$" в общем случае не симметричны по нижним индексам.

Обозначим:

$$\hat L_J = \frac{1}{n+1}\left(\overset{*}{\hat M}{}^K_\alpha \hat M^\alpha_{KJ} - \overset{*}{\hat\lambda}{}^K_\alpha \hat\lambda^\alpha_{KJ}\right),\quad \hat\lambda_\alpha = \hat L_K \overset{*}{\hat\lambda}{}^K_\alpha, \qquad (I.9)$$

где тензоры $\overset{*}{\hat\lambda}{}^K_\alpha$ и $\overset{*}{\hat M}{}^K_\alpha$ взаимны тензорам $\hat\lambda^\alpha_J$ и $\hat M^\alpha_J$, т.е.

$$\overset{*}{\hat\lambda}{}^K_\alpha \hat\lambda^\alpha_J = \delta^K_J,\quad \overset{*}{\hat M}{}^K_\alpha M^\alpha_J = \delta^K_J, \qquad (I.10)$$

Так как

$$\nabla \hat L_J = \hat L_{JK}\Omega^K,\quad \nabla\hat\lambda_\alpha = \hat\lambda_{\alpha K}\Omega^K. \qquad (I.11)$$

то системы величин $\hat L_J$ и $\hat\lambda_\alpha$ являются тензорами. Из (I.5), (I.11) следует:

$$d\hat L_n = \hat L_n(\Omega^n_n - \Omega^0_0) + \hat L_{nK}\Omega^K, \qquad (I.12)$$

$$d\hat\lambda_0 = \hat\lambda_0(\Omega^0_0 - \Omega^n_n) + \hat\lambda_{\alpha K}\Omega^K. \qquad (I.13)$$

Следовательно, величины $\hat L_n$ и $\hat\lambda_0$ являются относительными инвариантами.

Системы величин

$$\hat{\hat\lambda}{}^\alpha_J = \hat M^\alpha_J - \hat\lambda^\alpha_J \qquad (I.14)$$

и $\overset{*}{\hat{\hat\lambda}}{}^J_\alpha$, где

$$\overset{*}{\hat{\hat\lambda}}{}^J_\alpha \hat{\hat\lambda}{}^\alpha_K = \delta^J_K, \qquad (I.15)$$

являются тензорами.

Рассмотрим системы величин:

$$\hat\mu_\alpha = \overset{*}{\hat{\hat\lambda}}{}^J_\alpha\left(\hat P_J - \frac{1}{n+1}\overset{*}{\hat M}{}^K_\beta \hat M^\beta_{KJ}\right),$$
$$\nu_\alpha = \overset{*}{\hat{\hat\lambda}}{}^J_\alpha\left(\hat P_J - \frac{1}{n+1}\overset{*}{\hat\Lambda}{}^K_\beta \hat\Lambda^\beta_{KJ}\right), \qquad (I.16)$$

где значок * характеризует взаимный тензор по отношению к тензору, обозначенному соответствующими буквами без звездочки. Так как

$$\nabla\hat\mu_\alpha - \Omega^n_\alpha = \hat\mu_{\alpha K}\Omega^K,\quad \nabla\hat\nu_\alpha - \Omega^n_\alpha = \hat\nu_{\alpha K}\Omega^K, \qquad (I.18)$$

то системы величин $\{\mu_\alpha\}$ и $\{\nu_\alpha\}$ являются квазитензорами [2].

Системы величин

$$\hat M_J = \mu_\alpha \hat M^\alpha_J - P_J,\quad \hat N_J = \nu_\alpha \hat M^\alpha_J - P_J \qquad (I.19)$$

также являются квазитензорами, т.к.

$$\nabla\hat M_J - \Omega^0_J = \hat M_{JK}\Omega^K,\quad \nabla\hat N_J - \Omega^0_J = \hat N_{JK}\Omega^K. \qquad (I.20)$$

§ 2. Нормализации проективного пространства $\mathcal P_n$, порожденные семейством $\overset{*}{\hat\Pi}_n$

Тензоры $\{\hat L_J\}$ и $\{\hat\lambda_\alpha\}$ определяют в пространстве $\mathcal P_n$ инвариантные гиперплоскости

$$\hat L_J X^J = 0, \qquad (2.1)$$

$$\hat\lambda_\alpha X^\alpha = 0, \qquad (2.2)$$

проходящие соответственно через точки A_0 и A_n. Назовем их гиперплоскостями $\hat L$ и $\hat\lambda$. Условие $\hat L_n = 0$ ($\hat\lambda_0 = 0$) означает, что гиперплоскость $\hat L$ ($\hat\lambda$) содержит прямую A_0A_n. Исключая эти случаи, будем считать

$$\hat\lambda_0 \hat L_n \neq 0. \qquad (2.3)$$

Тогда пары $\{A_0, \hat\lambda\}$ и $\{A_n, \hat L\}$ определяют две нормализации пространства $\mathcal P_n$ [3, с.214].

Квазитензоры $\{\hat\mu_\alpha\}$, $\{\hat\nu_\alpha\}$ и $\{\hat M_J\}$, $\{\hat N_J\}$ определяют в пространстве $\mathcal P_n$ гиперплоскости

$$\hat\mu_\alpha \tilde X^\alpha + \tilde X^n = 0,\quad \hat\nu_\alpha \tilde X^\alpha + \tilde X^n = 0, \qquad (2.4)$$

$$\hat M_J \tilde X^J + \tilde X^0 = 0,\quad \hat N_J \tilde X^J + \tilde X^0 = 0, \qquad (2.5)$$

не проходящие соответственно через точки A_n и A_0. Назовем их гиперплоскостями $\hat\mu$, $\hat\nu$, $\hat M$, $\hat N$. Пары $\{A_n, \hat\mu\}$, $\{A_n, \hat\nu\}$, $\{A_0, \hat M\}$, $\{A_0, \hat N\}$ задают в пространстве $\mathcal P_n$ еще четыре нормализации.

§ 3. Индуцированные аффинные связности

Помещая вершины A_a ($a, b, c = \overline{1, n-1}$) репера на пересечение гиперплоскостей $\hat\lambda$, $\hat L$ и учитывая (I.5), (I.11), получим:

$$\begin{cases} \Omega^0_a = -\dfrac{\hat\lambda_{aJ}}{\hat\lambda_0}\Omega^J, & \Omega^0_n = \hat\lambda^0_J \Omega^J,\\ \Omega^n_a = -\dfrac{\hat L_{aJ}\overset{*}{\hat{\hat\lambda}}{}^J_b}{\hat L_n}\Omega^b_n, & \Omega^n_0 = \overset{*}{\hat\lambda}{}^n_\alpha \Omega^\alpha_n, \end{cases} \qquad (3.1)$$

где $\{\overset{*}{\hat{\hat\lambda}}{}^J_\beta\}$ — тензор, взаимный к тензору $\{\hat{\hat\lambda}{}^\alpha_K\}$.

Поля нормалей $\hat\lambda$ и $\hat L$ определяют в областях $\mathcal U \ni A_0$ и $\mathcal V \ni A_n$ пространства $\mathcal P_n$ аффинные связности без кручения. Формы Пфаффа

$$\Omega^J,\ \theta^K_J = \Omega^K_J - \delta^K_J \Omega^0_0;\ \Omega^\alpha_n,\ \omega^\beta_\alpha = \Omega^\beta_\alpha - \delta^\beta_\alpha \Omega^n_n \qquad (3.2)$$

этих связностей удовлетворяют уравнениям структуры:

$$d\Omega^J = \Omega^K \wedge \theta^J_K,\quad d\theta^K_J = \theta^L_J \wedge \theta^K_L + \frac{1}{2} R^K_{LMJ}\Omega^L \wedge \Omega^M; \qquad (3.3)$$

11 Зак. 2036

$$d\Omega^{\alpha}_{n}=\Omega^{\beta}_{n}\wedge\omega^{\alpha}_{\beta}, \quad d\omega^{\alpha}_{\beta}=\omega^{\gamma}_{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{\gamma}+\frac{1}{2}\tau^{\alpha}_{\gamma\eta\beta}\Omega^{\gamma}_{n}\wedge\Omega^{\eta}_{n}, \tag{3.4}$$

где компоненты тензоров кривизны $\{R^{\varkappa}_{LMJ}\}$ и $\{\tau^{\alpha}_{\gamma\eta\beta}\}$ связностей $\Gamma_{\hat{\lambda}}$ и $\Gamma_{\hat{L}}$ определяются формулами:

$$\begin{cases} R^{\hat{\beta}}_{LM\hat{\alpha}}=2\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_0}(\delta^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}\delta^{\hat{\gamma}}_{[L}\hat{\lambda}_{|\hat{\gamma}|M]}-\hat{\lambda}_{\hat{\alpha}[L}\delta^{\hat{\beta}}_{M]})+\hat{\lambda}^{0}_{[L}\delta^{n}_{M]}\delta^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}\right), \\ R^{n}_{LM\hat{\alpha}}=-\dfrac{2\hat{\lambda}_{\hat{\alpha}[L}\delta^{n}_{M]}}{\hat{\lambda}_0}, \quad R^{\hat{\alpha}}_{LMn}=2\hat{\lambda}^{0}_{[L}\delta^{\hat{\alpha}}_{M]}, \\ R^{n}_{LMn}=2\left(\delta^{\hat{\gamma}}_{[L}\hat{\lambda}_{|\hat{\gamma}|M]}+2\hat{\lambda}^{0}_{[L}\delta^{n}_{M]}\right); \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \tau^{\hat{\beta}}_{\gamma\eta\hat{\alpha}}=2\left(\frac{1}{\hat{L}_n}(\delta^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}\delta^{\hat{\varepsilon}}_{[\gamma}\overset{*}{\hat{\lambda}}{}^{J}_{\eta]}L_{\hat{\varepsilon}J}-\hat{L}_{\hat{\alpha}J}\overset{*}{\hat{\lambda}}{}^{J}_{[\gamma}\delta^{\hat{\beta}}_{\eta]})+\overset{*}{\hat{\lambda}}{}^{n}_{[\gamma}\delta^{0}_{\eta]}\delta^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}\right), \\ \tau^{0}_{\gamma\eta\hat{\alpha}}=\dfrac{2\hat{L}_{\hat{\alpha}J}\overset{*}{\hat{\lambda}}{}^{J}_{[\gamma}\delta^{0}_{\eta]}}{\hat{L}_n}; \quad \tau^{\hat{\alpha}}_{\gamma\eta 0}=2\overset{*}{\hat{\lambda}}{}^{n}_{[\gamma}\delta^{\hat{\alpha}}_{\eta]}; \quad \tau^{0}_{\gamma\eta 0}=2\left(\hat{L}_{\hat{\varepsilon}J}\delta^{\hat{\varepsilon}}_{[\gamma}\overset{*}{\hat{\lambda}}{}^{J}_{\eta]}+2\overset{*}{\hat{\lambda}}{}^{n}_{[\gamma}\delta^{0}_{\eta]}\right). \end{cases} \tag{3.6}$$

В силу (2.3) квазитензоры $\{\hat{M}_J\}$ и $\{\hat{N}_J\}$, $\{\hat{\mu}_\alpha\}$ и $\{\hat{\nu}_\alpha\}$ попарно различны и определяют в пространстве $\mathcal{P}_n$ два пучка нормализаций:

$$(\hat{N}_J+\sigma(\hat{M}_J-\hat{N}_J))\widetilde{X}^J+\widetilde{X}^0=0, \tag{3.7}$$

$$(\hat{\nu}_\alpha+\sigma(\hat{\mu}_\alpha-\hat{\nu}_\alpha))\widetilde{X}^\alpha+\widetilde{X}^n=0. \tag{3.8}$$

Обозначим через $N(\sigma)$ и $\nu(\sigma)$ – нормали (3.7) и (3.8). Сравнивая с (2.5), (2.6), убеждаемся, что

$$\hat{M}=N(1), \quad \hat{N}=N(0), \quad \hat{\mu}=\nu(1), \quad \hat{\nu}=\nu(0).$$

Геометрическая характеристика нормалей $N(\sigma)$ и $\nu(\sigma)$ дана в [5].

Относя пространство $\mathcal{P}_n$ к реперу R_σ, в котором вершины $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ расположены на пересечении гиперплоскостей (3.7) и (3.8), получим:

$$\Omega^{n}_{\alpha}=\overset{\sigma}{\nu}_{\alpha J}\Omega^{J}, \quad \Omega^{0}_{J}=\overset{\sigma}{N}_{JK}\Omega^{K}. \tag{3.9}$$

Связности без кручения $(\mathcal{P}_n,\overset{\sigma}{N})$, $(\mathcal{P}_n,\overset{\sigma}{\nu})$, определяемые формами

$$\overset{N}{\Omega}{}^{J}_{K}=\Omega^{J}_{K}-\delta^{J}_{K}\Omega^{0}_{0}, \quad \overset{\nu}{\Omega}{}^{\beta}_{\alpha}=\Omega^{\beta}_{\alpha}-\delta^{\beta}_{\alpha}\Omega^{n}_{n}$$

на областях $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ пространства $\mathcal{P}_n$, и связности

$$(\mathcal{P}_n,\overset{\sigma}{\Gamma}), (\mathcal{P}_n,\overset{\sigma}{G}), (\mathcal{P}_n,\overset{0\sigma}{G}), (\mathcal{P}_n,\overset{\sigma}{\gamma}), (\mathcal{P}_n,\overset{0\sigma}{\gamma}), (\mathcal{P}_n,\overset{\sigma}{g}), (\mathcal{P}_n,\overset{0\sigma}{g}),$$

определенные на области $\mathcal{U}\ni A_0$ формулами (1.7) – (1.10) работы [4], геометрически охарактеризованы в [4] (предложения 2.1, 2.2, 3.1, 3.2).

Библиографический список

1. Малаховский Н.В. О семействах коллинеаций многомерных проективных пространств // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1989. Вып.20. С.50-57.

2. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. М., 1953. Т.2. С.275-382.

3. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М., Л.: ГИТТЛ, 1950.

4. Малаховский Н.В. Аффинные связности, порожденные семейством коллинеаций // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1992. Вып.23. С.53-59.

5. Малаховский Н.В. Нормализации проективных пространств и характеристические числа, порожденные семейством коллинеаций // Там же, 1990. Вып.21. С.50-56.

УДК 514.75

$\mathcal{H}$-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю.И.Попов, И.Е.Лисицина

(Калининградский государственный университет)

Работа посвящена построению теории двухсоставного $H_2(\Lambda_1)$-распределения, которое названо кратко $\mathcal{H}$-распределением проективного пространства P_3. Дано задание $\mathcal{H}$-распределения в репере $\mathcal{R}_1(\mathcal{H})$ и в специализированном репере $\mathcal{R}_1(\mathcal{H})$ и доказана теорема существования: $\mathcal{H}$-распределение в проективном пространстве P_3 существует с произволом трех функций трех аргументов. Выяснен геометрический смысл голономности $\mathcal{H}$-распределения. Найдена конструкция построения поля инвариантных нормалей 2-го рода (p) оснащающего H_2-распределения – поля прямых (p) Нордена-Тимофеева. Рассматривается поле инвариантных нормалей (ν) 1-го рода $\mathcal{H}$-распределения, соответствующее в проективи-