10. *Kolář I., Michor P. W., Slovák J.* Natural operations in differential geometry // Springer-Ferlag. Berlin, 1993.

11. *Stelmastchuk S. N.* Vertical martingales, stochastic calculus and harmonic sections // Communications on Stochastic Analysis. 2013. Vol. 7, № 4. P. 535—549.

K. Polyakova

Vector-valued forms of the 1st, 2nd and 3rd orders for affine connection of the 2nd order

We consider the representation of the 2nd order affine connection using vector-valued forms of various orders: the 1st order canonical form of the 2nd order frame bundle on a manifold X_m; the 2nd order canonical form of the 1st order frame bundle on a manifold X_m; the 3rd order canonical form of a manifold X_m.

УДК 514.75

Ю. И. Попов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
yurij.popoff2015@yandex.ru

Нормализация базисного подрасслоения сильно сопряженного H-распределения

Рассматривается построение нормализаций базисного подрасслоения (Λ-подрасслоение) специального класса (SH-распределения) регулярных трехсоставных распределений (H-распределений) проективного пространства. Во всей работе используются обозначения и терминология работ [1; 2].

Ключевые слова: распределение, расслоение, нормализация, квазинормаль, нормаль.

1. Известно [2], что сильно сопряженное трехсоставное распределение проективного пространства (SH-распределение) задается уравнениями (без соответствующих замыканий)

$$\omega_p^n = \Lambda_{p\hat{q}}^n \omega_0^{\hat{q}}, \omega_i^n = \Lambda_{i\hat{j}}^n \omega_0^{\hat{j}}, \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha\hat{\beta}}^n \omega_0^{\hat{\beta}}, \omega_p^\alpha = \Lambda_{p\hat{A}}^\alpha \omega_0^{\hat{A}}$$

$$\omega_\alpha^p = \Lambda_{\alpha\hat{A}}^p \omega_0^{\hat{A}}, \omega_p^i = \Lambda_{p\hat{a}}^i \omega_0^{\hat{a}}, \omega_i^p = \Lambda_{i\hat{a}}^p \omega_0^{\hat{a}}, \omega_i^\alpha = \Lambda_{i\hat{v}}^\alpha \omega_0^{\hat{v}}$$

$$\omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha\hat{v}}^i \omega_0^{\hat{v}}.$$

Имеет место теорема существования [2]:

Теорема 1. *В n-мерном проективном пространстве P_nSH-распределение существует с произволом 2r (n-m-1) функций (n-s) аргументов, 2rs функций (m+1) аргументов и 2 (n-m-1) (m-r) функций (n-r) аргументов.*

2. Следуя работам [3—5], систему величин $\{K_\sigma\}$назовем квазинормалью SH-распределения, если в выбранном репере R_1 [2] при преобразованиях стационарной подгруппы элемента SH-распределения выполняется один из следующих законов преобразования величин $\{K_\sigma\}$:

$$\nabla_\delta K_\sigma + K_\sigma \pi_0^0 = \varepsilon_{\sigma\rho}^n \pi_n^\rho + \mu \pi_\sigma^0, \tag{1}$$

$$\nabla_\delta K_\sigma + K_\sigma \pi_0^0 = \varepsilon_{\rho\sigma}^n \pi_n^\rho + \mu \pi_\sigma^0, \tag{2}$$

$$\nabla_\delta K_\sigma + K_\sigma \pi_0^0 = \varepsilon b_{\sigma\rho}^n \pi_n^\rho + \mu \pi_\sigma^0, \tag{3}$$

где ε, μ — постоянные числа, отличные от нуля; $b_{\sigma\rho}^n$ — симметрический тензор:

$$b_{\sigma\rho}^n = \frac{1}{2}\left(\Lambda_{\sigma\rho}^n + \Lambda_{\rho\sigma}^n\right), \nabla b_{\sigma\rho}^n + b_{\sigma\rho}^n \omega_0^0 = b_{\sigma\rho K}^n \omega^K.$$

Отметим, что если в (1—3) σ положить равным p, i, α, ν, a, A, то уравнения (1—3) задают квазинормали, соответствующие основным структурным подрасслоениям (Λ-, L-, E-, Φ-, M-, Ψ- подрасслоениям (*)) данного SH-распределения.

Каждая из трех типов квазинормалей устанавливает биекцию между нормалями 1-го и 2-го рода соответствующего основного структурного подрасслоения (*) таким образом:

а) $$\nu_\sigma^0 = -\frac{1}{\mu}\left(K_\sigma + \varepsilon\Lambda_{\sigma\rho}^n \nu_n^\rho\right), \nu_n^\rho = -\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_n^{\rho\sigma}\left(K_\sigma + \mu\nu_\sigma^0\right), \quad (4)$$

если квазинормаль 1-го типа (1);

б) $$\nu_\sigma^0 = -\frac{1}{\mu}\left(K_\sigma + \varepsilon\Lambda_{\rho\sigma}^n \nu_n^\sigma\right), \nu_n^\rho = -\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_n^{\sigma\rho}\left(K_\sigma + \mu\nu_\sigma^0\right), \quad (5)$$

если квазинормаль 2-го типа (2);

в) $$\nu_\sigma^0 = -\frac{1}{\mu}\left(K_\sigma + \varepsilon b_{\sigma\rho}^n \nu_n^\rho\right), \nu_n^\rho = -\frac{1}{\varepsilon}b_n^{\rho\sigma}\left(K_\sigma + \mu\nu_\sigma^0\right), \quad (6)$$

если квазинормаль 3-го типа (3).

Построим в разных дифференциальных окрестностях следующие квазинормали Λ- подрасслоения:

а) в окрестности 1- го порядка квазинормаль 1-го типа:

$$K_p^1 = \Lambda_{pn}^n \stackrel{def}{=} t_p, \nabla_\delta t_p + t_p\pi_0^0 = \Lambda_{pq}^n \pi_n^q + \pi_p^0;$$

б) в окрестности 2-го порядка квазинормали 2-го типа [1; 2]:

$$K_p^2 \stackrel{def}{=} \frac{1}{r+2}\Lambda_p, \ \nabla K_p^2 + K_p^2\pi_0^0 =_{qp}^n \pi_n^q + \mu\pi_p^0,$$

$$K_p^3 \stackrel{def}{=} \frac{1}{s}\mathrm{L}_p, K_p^4 \stackrel{def}{=} \frac{1}{n-m-1}\mathrm{E}_p, K_p^5 \stackrel{def}{=} \frac{1}{m+2}\tilde{\mathrm{M}}_p,$$

$$K_p^6 \stackrel{def}{=} \frac{1}{n-r-1}\Phi_p, \ K_p^7 \stackrel{def}{=} \frac{1}{n-s+1}\Psi_p, K_p^8 \stackrel{def}{=} \frac{1}{n+1}\tilde{\mathrm{H}}_p,$$

$$K_p^9 \stackrel{def}{=} \mathrm{E}_p, \ K_p^{10} \stackrel{def}{=} \xi_p,$$

и квазинормаль 3-го типа

$$K_p^{11} \stackrel{def}{=} b_p, \nabla b_p + b_p\pi_0^0 = \mathrm{b}_{pq}^n \pi_n^q - \pi_p^0;$$

в) в окрестности 3-го порядка квазинормали 3-го типа [4; 5]:

$$K_p^{12} \overset{def}{=} C_p, \nabla_\delta C_p + C_p \pi_0^0 = -\Lambda_{pq}^n \pi_n^q - \pi_p^0;$$

$$K_p^{13} \overset{def}{=} C_p + 3B_p, \nabla_\delta K_p^{13} + K_p^{13} \pi_0^0 = 2\mathrm{b}_{pq}^n \pi_n^q + \pi_p^0.$$

3. Будем определять нормали $\{\nu_n^p\}$ и $\{\nu_p^0\}$ 1-го и 2-го рода Λ-подрасслоения, используя способ нахождения общих нормалей двух квазинормалей [4; 5].

а) В окрестности 2-го порядка пара квазинормалей-(K_p^1, K_p^2) задает в каждом центре A_0 нормаль 1-го рода $\{N_n^p\}$ Λ-подрасслоения:

$$N_n^p = -\frac{1}{2} b_n^{pq} \left(K_q^1 + K_q^2\right).$$

Однако общей нормали 2-го рода они не имеют, а при $r_{pq}^n = 0$ (подтензор r_{pq}^n тензоранеголономности $\{r_{pq}^{\hat{a}}\}$) для этой пары существует нормаль 2-го рода $\{N_p^0\}$, где

$$N_p^0 = \frac{1}{2}\left(K_q^2 - K_q^1\right).$$

В дальнейшем это соответствие будем обозначать кратко так:

$$\left(K_q^1; K_q^2\right) \to \left(N_n^p = -\frac{1}{2} b_n^{pq} \left(K_q^1 + K_q^2\right), N_p^0 = \frac{1}{2}\left(K_p^2 - K_p^1\right)\right).$$

Таким образом, аналогично получаем следующие соответствия на Λ-подрасслоении при $r_{pq}^n = 0, (\varepsilon = \overline{2; 10})$:

$$\left(K_p^1; K_p^\varepsilon\right) \to \left(\underset{(\varepsilon)}{N_n^p} = -\frac{1}{2} b_n^{pq} \left(K_q^1 + K_q^\varepsilon\right), \underset{(\varepsilon)}{N_p^0} = \frac{1}{2}\left(K_p^\varepsilon - K_p^1\right)\right).$$

б) В окрестности 3-го порядка:

$$\left(K_p^{12};K_p^{\varepsilon}\right)\to\left(\underset{(\varepsilon)}{S}{}_n^p=\frac{1}{2}\Lambda_n^{pq}\left(C_q+K_q^{\varepsilon}\right),\underset{(\varepsilon)}{S}{}_p^0=\frac{1}{2}\left(K_p^{\varepsilon}+C_p\right)\right),$$

$$\left(K_p^{11}\overset{def}{=}b_p;K_p^{13}\right)\to\begin{cases}\Phi_n^p=\dfrac{1}{2}\mathrm{b}_n^{pq}\left(K_q^{13}+4K_q^{11}\right),\\ \Phi_p^0=\dfrac{1}{2}\left(K_p^{13}-2K_p^{11}\right).\end{cases}\tag{7}$$

Отметим, что в случае регулярной гиперполосы [6], гиперполосного распределения [4], трехсоставного распределения [5] эти нормали (7) являются аналогами нормалей Фубини. В силу этого пару нормалей $(\Phi_n^p;\Phi_p^0)$ в каждом центре A_o назовем первыми аналогами нормалей Фубини Λ-подрасслоения данного SH-распределения.

4. В работе [2] нами построены для Λ-подрасслоения SH-распределения нормали 1-го рода Фубини $\{F_n^p\}$ и Вильчинского $\{W_n^p\}$. В биекции (6), определяемой квазинормалью $K_p^{11}\overset{def}{=}b_p$, находим им соответствующие нормали второго рода:

$$\mathrm{F}_p^0=b_p+b_{pq}^nF_n^q,W_p^0=b_p+b_{pq}^nW_n^q.\tag{8}$$

Таким образом, пара нормалей $(F_n^p;F_p^0)$ (8) Λ-подрасслоения задает второй аналог нормалей Фубини (в отличие от первого аналога), а пара нормалей $(W_n^p;W_p^0)$ задает в каждом центре A_o нормализацию Вильчинского [5; 6].

5. На Λ-подрасслоении SH-распределения в дифференциальной окрестности 2-го порядка введем, согласно работе [7], поле квазитензора:

$$\mathrm{M}_n^p=-\frac{1}{r\left(r+2\right)}\Lambda_n^{ps}b_n^{qt}\left(\Lambda_{sqt}^n+\Lambda_{sq}^nK_t^1+\Lambda_{st}^nK_q^1+\Lambda_{tq}^nK_s^1\right).\tag{9}$$

Для гиперполосных линейных элементов [7] и для гиперполосных распределений проективного пространства [6] нормаль (9) является нормалью Михэйлеску 1-го рода. Имея это в виду, мы за нормалями $N_{n-r}(\mathrm{M}_n^p)$ сохраним название нормалей Михэйлеску 1-го рода Λ-подрасслоения (не обязательно взаимного).

Используя биекцию (4), определенную квазинормалью K_p^1, найдем нормаль Михэйлеску 2-го рода Λ-подрасслоения:

$$\mathrm{M}_p^0 = -\left(K_p^1 + \Lambda_{pq}^n \mathrm{M}_n^q\right).$$

Таким образом, нормализация $(\mathrm{M}_n^p, \mathrm{M}_p^0)$ Λ-подрасслоения определена первыми аналогами нормалей Михэйлеску в дифференциальной окрестности 2-го порядка. Для Λ-подрасслоения при $r_{pq}^n = 0$ нормали Михэйлеску 1-го и 2-го рода примут вид

$$m_n^p = \frac{1}{2}\mathrm{b}_n^{pt}\left(b_t + K_t^1\right), m_p^0 = \frac{1}{2}\left(b_p - K_p^1\right).$$

Следовательно, нормализация (m_n^p, m_p^0) Λ-подрасслоения определена вторыми аналогами Михэйлеску [5; 6].

В результате имеет место

Теорема 2. *На базисном Λ-подрасслоении SH-распределение порождает внутренним образом 23 нормализации в смысле Нордена:*

а) $\left(\underset{(\varepsilon)}{N_n^p}, \underset{(\varepsilon)}{N_p^0}\right), \left(M_n^p, M_p^0\right), \left(m_n^p, m_p^0\right)$ *в дифференциальной окрестности 2-го порядка;*

б) $\left(\underset{(\varepsilon)}{S}{}_n^p, \underset{(\varepsilon)}{S}{}_p^0\right), \left(\Phi_n^p, \Phi_p^0\right), \left(\mathrm{F}_n^p, \mathrm{F}_p^0\right), \left(\mathrm{W}_n^p, \mathrm{W}_p^0\right)$ *в дифференциальной окрестности 3-го порядка.*

Список литературы

1. *Попов Ю.И.* Сильно взаимные трехсоставные распределения проективного пространства // Вестник БФУ им. И. Канта. 2015. Вып. 10. С. 62—76.

2. *Попов Ю.И.* Сильно сопряженные трехсоставные распределения проективного пространства // Вестник БФУ им. И. Канта. 2016. Вып. 1. С. 5—18.

3. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности I // Труды геометрического семинара / ВИНИТИ М., 1971. Т. 3. С. 49—94.

4. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники / ВИНИТИ. М., 1975. Т. 7. С. 117—151.

5. *Попов Ю.В.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства : монография. СПб., 1992.

6. *Столяров Н.М.* Двойственная теория оснащенных многообразий : монография. Чебоксары, 1992.

7. *Остиану Н.М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Труды геометрического семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т. 4. С. 71—120.

Y. Popov

Normalization of the base subbundle of strong dual H-distribution

The construction of the base normalization for subbundle (Λ-subbundle) of special class (SH-distribution) of threefold regular distributions (H-distributions) in projective space. Throughout the paper we use the notation and terminology of [1, 2].