УДК 514.76

***А. Я. Султанов[1], М. В. Глебова[2], О. В. Болотникова[3]***
*[1, 2, 3] Пензенский государственный университет, Россия*
[1, 2, 3] mvmorgun@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-12

# Алгебры Ли дифференцирований линейных алгебр над полем

В работе исследуется система линейных уравнений, задающих алгебру Ли дифференцирований $DerA$ произвольной конечномерной линейной алгебры $A$ над полем. Получена система уравнений, которой удовлетворяют компоненты произвольного дифференцирования относительно фиксированного базиса алгебры $A$. Эта система является системой линейных однородных уравнений. Доказан закон преобразования матрицы этой системы. Доказана инвариантность ранга матрицы системы при переходе к новому базису в алгебре $A$. Далее рассматривается возможность применения полученных результатов в дифференциальной геометрии при оценки сверху размерностей групп аффинных преобразований. В качестве примера приведен разработанный И. П. Егоровым метод исследования размерностей алгебр Ли аффинных векторных полей на гладких многообразиях, снабженных линейными связностями, имеющими ненулевые тензорные поля кручения.

***Ключевые слова:*** линейная алгебра над полем, дифференцирование линейной алгебры, алгебра Ли, алгебра Ли дифференцирований.

## Введение

Пусть $P$ — поле, $W$ — векторное пространство над этим полем.

*Поступила в редакцию 29.06.2021 г.*

**Определение 1.** *Билинейной операцией*, заданной на векторном пространстве $W$, называется отображение

$$\varphi : W \times W \to W,$$

удовлетворяющее условиям

$$(1)\ \varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\varphi(x,z) + \beta\varphi(y,z),$$

$$(2)\ \varphi(z, \alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(z,x) + \beta\varphi(z,y)$$

для любых $\alpha, \beta \in P$ и любых $x, y, z \in W$.

Условие (1) выражает линейность операции $\varphi$ по первому аргументу, а условие (2) — линейность по второму аргументу. Билинейная операция $\varphi$ называется иначе операцией умножения, а выражение $\varphi(x,y)$ обозначается символом $xy$ и называется произведением векторов $x$ и $y$.

Условия (1) и (2) в принятых обозначениях примут вид

$$(\alpha x + \beta y)z = \alpha(xy) + \beta(yz),$$

$$z(\alpha x + \beta y) = \alpha(zx) + \beta(zy).$$

**Определение 2.** Векторное пространство $W$, на котором задана билинейная операция, называется *линейной алгеброй над полем* $P$.

Обозначим эту пару через $A$: $A = (W, \varphi)$. Векторное пространство $W$ называется носителем алгебры $A$, а векторы из $W$ — элементами алгебры $A$. Обычно алгебру $A$ отождествляют с $W$. Если векторное пространство $W$ является конечномерным, то алгебра $A$ называется алгеброй конечного ранга, причем рангом алгебры $A$ называется размерность векторного пространства $W$ над полем $P$. Ранг алгебры $A$ часто называют размерностью линейной алгебры.

**Определение 3.** Отображение $f: W \to W$ называется *линейным* (иначе — *эндоморфизмом*), если для любых $\alpha, \beta \in P$ и любых $x, y \in W$ выполняется условие

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(x).$$

Множество всех линейных отображений векторного пространства $W$ в себя обозначается через $End\ W$. Для любых $f, g \in End\ W$ сумма $f + g$ и произведение $\gamma f, \gamma \in P$, определяются условиями

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\gamma f)(x) = \gamma(f(x)).$$

Множество $End\ W$ с введенными операциями сложения линейных отображений и умножения их на скаляры из поля $P$ становится векторным пространством. В полученном векторном пространстве можно определить операцию композиции $\circ$ по следующему правилу:

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

для всех $x \in W$ и для всех $f, g \in End\ W$.

Эта операция является билинейной, значит, пара $(End\ W, \circ)$ является линейной алгеброй, называемой линейной алгеброй эндоморфизмов векторного пространства $W$. В силу того что операция $\circ$ является ассоциативной операцией, алгебра $(End\ W, \circ)$ называется ассоциативной. Условием $[x, y] = x \circ y - y \circ x$ определим в алгебре $(EndW, \circ)$ новую операцию $[,]$. В результате получим новую алгебру $gl(W)$, являющуюся алгеброй Ли. Эта алгебра называется полной линейной алгеброй.

**Определение 4.** Линейный оператор $D$ называется *дифференцированием алгебры* $A = (W, \varphi)$, если выполняется следующее условие:

$$D(xy) = D(x)y + xD(y).$$

Совокупность всех дифференцирований линейной алгебры $A$ обозначается символом $Der\ A$. На множестве $Der\ A$ естественным образом вводится операция коммутирования по правилу

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$$

для всех $D_1, D_2 \in DerA$.

Операция композиции над дифференцированиями, вообще говоря, не проводит к дифференцированию алгебры $A$, а операция коммутирования $(D_1, D_2) \to [D_1, D_2]$ приводит к дифференцированию алгебры $A$. Более того, пара $(Der, [,])$ является алгеброй, и эта алгебра называется алгеброй Ли дифференцирований линейной алгебры $A$.

## 1. О размерности алгебры Ли $DerA$

**Теорема 1.** *Пусть алгебра $A$ имеет конечный ранг, равный $m$, тогда* $\dim_P (DerA) \le m^2$.

Для доказательства этого утверждения выберем какой-нибудь базис алгебры $A$: $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_m)$ и для каждого дифференцирования $D \in DerA$ образы $D(\varepsilon_i)$ базисных элементов разложим по элементам базиса $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_m)$. Тогда получим $D(\varepsilon_i) = x_i^j \varepsilon_j$, $x_i^j \in P$.

Матрица

$$M(D) = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & ... & x_m^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & .... & x_m^2 \\ x_1^n & x_2^n & ... & x_m^n \end{pmatrix}$$

называется матрицей дифференцирования $D$ в базисе $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_m)$. Заметим, что верхний индекс элементов этой матрицы является номером строки, а нижний индекс — номером столбца.

Совокупность $gl(m, P)$ всех квадратных матриц порядка $m$ образует векторное пространство над полем $P$ относительно естественных операций сложения матриц и умножения их на скаляры из поля *P*. Размерность этого векторного пространства равна $m^2$ Операцию коммутирования в $gl(m,P)$ определим условием $[A,B]=AB-BA$ для любых $A,B\in gl(m,P)$.

Выражения $AB$ и $BA$ выражают произведения матриц. Алгебра $gl(m,P)$ с операцией [,] называется *полной матричной алгеброй Ли над полем P*. Размерность алгебры $gl(m,P)$ равна $m^2$.

Отображение $h$: $DerA\to gl(m,P)$, определенное условием $h(D)=M(D)$, является изоморфизмом. Следовательно, $\dim_P DerA=m^2$.

**Теорема 2.** $\dim_P DerA=m^2$ *тогда и только тогда, когда умножение в алгебре* $A$ *— нулевое, то есть* $xy=0_A$ *для всех* $x,y\in A$.

*Доказательство*. Пусть $\dim_P DerA=m^2$ и $D(\varepsilon_i)=x_i^k\varepsilon_k$. Тогда, действуя на произведение $\varepsilon_i\varepsilon_j$ дифференцированием *D*, получим $D(\varepsilon_i\varepsilon_j)=D(\varepsilon_i)\varepsilon_j+\varepsilon_i D(\varepsilon_j)$. Учитывая, что $\varepsilon_i\varepsilon_j=C_{ij}^k\varepsilon_k$, где $C_{ij}^k\in P$ и называются структурными постоянными алгебры $A$, находим

$$C_{ij}^k D(\varepsilon_k)=D(\varepsilon_i)\varepsilon_j+\varepsilon_i D(\varepsilon_j).$$

Отсюда

$$C_{sj}^h x_i^s+C_{is}^h x_j^s-C_{ij}^k x_k^h=0. \qquad (1.1)$$

Эти соотношения можно представить, используя символ Кронекера $\delta_j^i=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$ следующим образом:

$$(C_{sj}^h\delta_i^k+C_{is}^h\delta_j^k-C_{ij}^k\delta_s^h)x_h^s=0. \qquad (1.2)$$

Они представляют собой систему линейных однородных уравнений относительно переменных $x_h^s$. По предположению, каждый набор $x_i^k$ является решением полученной системы (1.1). Значит, все элементы матрицы системы (1.2) должны быть равны нулю:

$$C_{sj}^h \delta_i^k + C_{is}^h \delta_j^k - C_{ij}^k \delta_s^h = 0.$$

Свернув эти соотношения по индексам *k* и *s*, получим

$$C_{ij}^h + C_{ij}^h - C_{ij}^h = 0.$$

Отсюда $C_{ij}^h = 0$, что приводит к равенствам $\varepsilon_i \varepsilon_j = 0$ для всех $i, j = 1, 2, ..., m$. Значит, $xy = 0$ для всех $x, y \in A$. Обратное утверждение очевидно.

## 2. Закон преобразования элементов матрицы системы (1.2)

Матрица $C$ системы (1.2) имеет элементы

$$C\begin{pmatrix} h & k \\ ij & s \end{pmatrix} = \delta_i^k C_{sj}^h + \delta_j^k C_{is}^h - \delta_s^h C_{ij}^k.$$

Мультииндекс $\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix}$ соответствует строке, а мультииндекс $\begin{pmatrix} h \\ ij \end{pmatrix}$ — столбцам матрицы $C$. При переходе к новому базису $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, ..., \varepsilon'_m)$ в алгебре $A$ элементы матрицы $C$ будут подвергаться преобразованиям по тензорному закону. Покажем это.

Пусть $\varepsilon_i = a_i^s \varepsilon'_s$, где матрица $\left\| a_i^s \right\|$ — невырожденная, $\varepsilon'_k = b_k^t \varepsilon_t$. Из этих равенств следует $\varepsilon_i = a_i^s b_s^t \varepsilon_t$. Отсюда $a_i^s b_s^t \varepsilon_t = \delta_i^t \varepsilon_t$. Следовательно, $a_i^s b_s^t = \delta_i^t$.

Аналогично $\varepsilon'_k = b_k^t a_t^s \varepsilon'_s$, поэтому $a_t^s b_k^t = \delta_k^s$. Обозначим через $C'^k_{ij}$ структурные постоянные алгебры $A$ относительно базиса $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, ..., \varepsilon'_m)$. Значит, $\varepsilon'_i \varepsilon'_j = C'^k_{ij} \varepsilon'_k$. Заменив элементы нового базиса на их разложения по элементам старого базиса, получим

$$b_i^t b_j^s \varepsilon_t \varepsilon_s = C'^k_{ij} b_k^p \varepsilon_p.$$

Поскольку $\varepsilon_t \varepsilon_s = C_{ts}^p \varepsilon_p$, то предыдущие равенства дают

$$C_{ts}^p b_i^t b_j^s = C'^k_{ij} b_k^p.$$

Отсюда $C'^k_{ij} = C_{ts}^p a_p^k b_i^t b_j^s$.

Аналогично $C_{ij}^k = C'^p_{i_1 i_2} b_p^k a_i^{i_1} a_j^{i_2}$.

На основании приведенных равенств получим

$$C\begin{pmatrix} i_1 & \Big| i_2 \\ j_1 j_2 & \Big| j_3 \end{pmatrix} b_{k_1}^{j_1} b_{k_2}^{j_2} b_{k_3}^{j_3} a_{i_1}^{h_1} a_{i_2}^{h_2} = C'\begin{pmatrix} h_1 & \Big| h_2 \\ k_1 k_2 & \Big| k_3 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Таким образом, элементы матриц $C$ и $C'$ связаны тензорным законом.

## 3. Инвариантность размерности пространства решений системы (1.2)

Система линейных однородных уравнений (1.2) относительно нового базиса $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, ..., \varepsilon'_m)$ примет вид

$$C'\begin{pmatrix} h_1 & \Big| h_2 \\ k_1 k_2 & \Big| k_3 \end{pmatrix} y_{h_2}^{k_2} = 0. \tag{1.4}$$

Докажем, что размерность пространства решений системы однородных линейных уравнений (1.2) не зависит от выбора базиса в алгебре $A$, что равносильно условию инвариантности ранга матрицы $C$ при переходе к новому базису.

Предположим, что система (1.4) имеет ненулевое решение. Тогда пространство всех решений системы (1.4) имеет базис. Пусть упорядоченные наборы элементов поля $P$

$$u_{\alpha t}^{s} \quad (\alpha = 1, 2, ..., m^2 - \rho),$$

где $\rho$ — ранг матрицы $C'$, составляют базис пространства решений системы (1.4). Тогда имеем верные равенства

$$C'\begin{pmatrix} h_1 & \Big| t \\ k_1 k_2 & \Big| s \end{pmatrix} u_{\alpha t}^{s} = 0,$$

где по индексам $s$ и $t$ ведется суммирование от 1 до $m$. Заменив в этих соотношениях коэффициенты по формулам (1.3) с последующими свертываниями, получим

$$C\begin{pmatrix} t & \Big| i_2 \\ l_1 l_2 & \Big| j_3 \end{pmatrix} \upsilon_{\alpha i_2}^{j_3} = 0$$

для всех $\alpha \in \{1, 2, ..., m^2 - \rho\}$, причем $\upsilon_{\alpha i_2}^{j_3} = b_s^{j_3} a_{i_2}^{t} u_{\alpha t}^{s}$. Следовательно, наборы $\upsilon_{\alpha i_2}^{j_3}$ являются решениями системы линейных однородных уравнений

$$C\begin{pmatrix} t & \Big| i_2 \\ l_1 l_2 & \Big| i_3 \end{pmatrix} x_{i_2}^{i_3} = 0 \qquad (1.5)$$

для каждого $\alpha \in \{1, 2, ..., m^2 - \rho\}$.

Эта система решений линейно независима. Действительно, пусть $\lambda^{\sigma} \upsilon_{\sigma i_2}^{j_3} = 0$. Тогда $\lambda^{\sigma} b_s^{j_3} a_{i_2}^{t} u_{\sigma t}^{s} = 0$. Свернув эти соотношения с $a_{j_3}^{k}, b_{t}^{i_2}$, получим $\lambda^{\sigma} u_{\sigma t}^{k} = 0.$ Отсюда в силу линейной независимости системы решений $u_{\sigma t}^{k}$ следует $\lambda^{\sigma} = 0.$ Утверждение доказано.

Пусть упорядоченный набор элементов $\upsilon_t^s$ — произвольное решение системы (1.5). Тогда

$$C\begin{pmatrix} h & \big| t \\ l_1 l_2 & \big| s \end{pmatrix} \upsilon_t^s = 0$$

представляет собой верное равенство.

Рассмотрим упорядоченный набор $u_q^t$, где $(t, q = 1, 2, ..., m)$, определенный формулами

$$u_q^p = a_s^p b_q^t \upsilon_t^s .$$

Тогда $\upsilon_t^s = b_p^s a_t^q u_q^p .$ Поэтому получим

$$C'\begin{pmatrix} h & \big| t \\ l_1 l_2 & \big| s \end{pmatrix} b_p^s a_t^q u_q^p = 0.$$

Свернем эти равенства последовательно с $b_{k_1}^{l_1}, b_{k_2}^{l_2}, a_h^i .$ Тогда получим следующие равенства:

$$C\begin{pmatrix} h & \big| t \\ l_1 l_2 & \big| s \end{pmatrix} b_{k_1}^{l_1} b_{k_2}^{l_2} b_p^s a_h^i a_t^q u_q^p = 0.$$

Учитывая равенства (1.3), эти соотношения примут вид

$$C'\begin{pmatrix} i & \big| q \\ k_1 k_2 & \big| p \end{pmatrix} u_q^p = 0.$$

Значит, упорядоченный набор $u_q^p$ элементов поля $P$ является решением системы (1.1). Это решение можно разложить по базисным решениям $u_{\alpha t}^{s}$ :

$$u_q^p = \mu^{\sigma} u_{\sigma q}^{p} .$$

Поскольку $u_q^p = a_s^p b_q^t \upsilon_t^s$, $u_{\sigma q}^p = a_s^p b_q^t \upsilon_{\sigma t}^s$, имеем

$$a_s^p b_q^t \upsilon_t^s = \mu^\sigma a_s^p b_q^t \upsilon_{\sigma t}^s.$$

Следовательно, $\upsilon_t^s = \mu^\sigma \upsilon_{\sigma t}^s$.

Таким образом, решения $\upsilon_{\sigma t}^s$ $(\sigma = 1, 2, ..., m^2 - \rho)$ линейно независимы и порождают пространство решений системы (1.2). Поэтому размерность пространства решений системы (1.2) равна $m^2 - \rho$, то есть такая же, как размерность пространства решений системы (1.4).

Если система (1.4) имеет только нулевое решение, то система (1.2) будет иметь также одно нулевое решение. Действительно, если предположить, что система (1.2) имеет ненулевое решение, то аналогичными рассуждениями получим, что система (1.4) тоже имеет ненулевое решение.

Таким образом, доказана следующая

**Теорема 3.** *Ранг системы (1.2) линейных однородных уравнений не зависит от выбора базиса пространства $W$.*

Исследования размерностей алгебр дифференцирований линейных алгебр тесно связаны с изучением групп аффинных преобразований многообразий, снабженных линейной связностью. Опишем эту связь вкратце.

Пусть $M_n$ — гладкое связное многообразие класса $C^\infty$, $\nabla$ — линейная связность, заданная в нем. Связность $\nabla$ порождает два тензорных поля: $R$ — тензорное поле кривизны и $T$ — тензорное поле кручения. Эти тензорные поля определяются тождествами

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

соответственно.

В этих равенствах $X, Y, Z$ представляют собой произвольные векторные поля.

Векторное поле $X$ называется инфинитезимальным аффинным преобразованием пространства $(M_n, \nabla)$, если $L_X \nabla = 0$, где $L_X$ — символ производной Ли вдоль векторного поля $X$ [2; 6].

Известно, что совокупность всех инфинитезимальных аффинных преобразований образует относительно операции коммутирования векторных полей алгебру Ли, которую обозначим $aff(\nabla)$. Известно также, что $L_X R = 0$ и $L_X T = 0$ для любого $X \in aff(\nabla)$. Зафиксируем некоторую точку $q \in M_n$ и выберем карту $(U, x^i)$ таким образом, чтобы $q \in U$. Тогда линейная связность будет задаваться компонентами $\Gamma^i_{jk}$, определенными условиями $\Gamma^i_{jk}\partial_i = \nabla_{\partial_j}\partial_k$. Тензорное поле кручения $T$ будет иметь составляющие $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$. На касательном пространстве $T_q(M)$ возникает структура линейной алгебры $A = (T_q(M), \circ)$ с операцией умножения касательных векторов $a = a^i e_i$, $b = b^i e_i$, где $e_i = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q$ определены по формуле $ab = (T^i_{jk}(q))e_i$. Положим $T^i_{jk}(q) = C^i_{jk}$. Эта алгебра антикоммутативна: $ab = -ba$. Изучим алгебру Ли дифференцирований введенной алгебры $A$ с алгеброй Ли $aff(\nabla)$. Для этого сначала запишем уравнения $L_X \nabla = 0$ в координатах. Пусть $X = X^i \partial_i$ — локальное представление векторного поля $X$. Тогда для любых $\partial_j$, $\partial_k$ будем иметь

$$L_X \nabla(\partial_j, \partial_k) = 0. \tag{1.6}$$

Эти соотношения равносильны следующей системе уравнений:

$$\partial_{jk} X^i + \Gamma^i_{mk}\partial_j X^m + \Gamma^i_{jm}\partial_k X^m - \Gamma^m_{jk}\partial_m X^m + X^m \partial_m \Gamma^i_{jk} = 0. \tag{1.7}$$

Поменяем местами индексы $j$ и $k$, затем из соотношения (1.7) вычтем полученные соотношения. В результате имеем следующие равенства:

$$X^m \partial_m T^i_{jk} + T^i_{mk} \partial_j X^m + T^i_{jm} \partial_k X^m - T^m_{jk} \partial_m X^i = 0.$$

Выразив частные производные через ковариантные производные, получим

$$X^m \nabla_m T^i_{jk} + T^i_{mk} \nabla_j X^m + T^i_{jm} \nabla_k X^m - T^m_{jk} \nabla_m X^i = 0.$$

В точке $q \in U$ эти соотношения будут задавать нам систему линейных однородных уравнений относительно переменных $x^m = X^m(q)$, $x^m_j = \partial_j X^m(q)$ с коэффициентами

$$C^i_{jkm} = (\nabla_m T^i_{jk})(q), \ \ C^i_{jk} = (T^i_{jk}(q)):$$

$$x^m C^i_{jkm} + C\left(\begin{array}{c|c} i & s \\ jk & m \end{array}\right) x^m_s = 0, \tag{1.8}$$

где $C\left(\begin{array}{c|c} i & s \\ jk & m \end{array}\right) = \delta^s_j C^i_{mk} + \delta^s_k C^i_{jm} - \delta^i_m C^s_{jk}$. Число неизвестных в системе (1.8) равно $n^2 + n$.

Матрица $C$ с элементами $C\left(\begin{array}{c|c} i & s \\ jk & m \end{array}\right)$ представляет собой матрицу системы линейных однородных уравнений, определяющих дифференцирование $D$, с условиями $D(e_i) = x^i_i e_j$.

Она является подматрицей матрицы системы (1.8). Поэтому если $rank\ C \geq \rho$, то размерность $r$ пространства решений системы (1.8) будет удовлетворять неравенству $r \leq n^2 + n - \rho$.

При исследовании размерности алгебры Ли аффинных векторных полей важно знать оценку размерности алгебры дифференцирований линейной алгебры $A$. И. П. Егоров предложил следующий прием оценки размерности алгебры дифференцирований линейной алгебры $A$ (используя инвариантность ранга матрицы относительно выбора базиса векторного пространства).

Выделим случаи:

а) существует карта $(U, x^i)$, $q \in U$, такая, что $T^1_{23}(q) \neq 0$, то есть $C^1_{23} \neq 0$;

б) в каждой карте $(U, x^i)$, $q \in U$, компоненты вида $T^\alpha_{\beta\gamma}$ ( $\alpha, \beta, \gamma$ попарно различны) в точке $q$ равны 0, но существует карта, относительно которой $T^1_{12}(q) \neq 0$, то есть $C^1_{12} \neq 0$.

В случае а) он доказал, что $rank\ C \geq 3n - 6$. Следовательно, размерность алгебры Ли $aff(\nabla) \leq n^2 - 2n + 6$.

В случае б) $rank\ A \geq n$, поэтому размерность алгебры Ли $aff(\nabla) \leq n^2$.

Идеи И. П. Егорова использовались в работах К. Яно, Ш. Кобаяси и учеников И. П. Егорова.

### *Список литературы*


1. *Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В.* Пространства над алгебрами : учеб. пособие. Казань, 1985.
2. *Егоров И. П.* Движения в пространствах аффинной связности // Учен. записки Пенз. пед. ин-та им. В.Г. Белинского. Казань, 1965. С. 5—179.
3. *Картан Э., Эйленберг С.* Гомологическая алгебра. М., 1960.
4. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии / пер. с англ. М., 1986.
5. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М., 1970.
6. *Yano K.* The theory of Lie derivaruves and its applications. Amsterdam, 1957.

*A. Ya. Sultanov[1], M. V. Glebova[2], O. V. Bolotnikova[3]*
*[1, 2, 3] Penza State University*
*37 Lermontova St., Penza, 440026, Russia*
[1, 2, 3] mvmorgun@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-12

# Lie algebras of differentiations of linear algebras over a field

Submitted on June 29, 2021

In this paper, we study a system of linear equations that define the Lie algebra of differentiations *DerA* of an arbitrary finite-dimensional linear algebra over a field. A system of equations is obtained, which is satisfied by the components of an arbitrary differentiation with respect to a fixed basis of algebra *A*. This system is a system of linear homogeneous equations. The law of transformation of the matrix of this system is proved. The invariance of the rank of the matrix of this system in the transition to a new basis in algebra is proved. Next, we consider the possibility of applying the obtained results in differential geometry when estimating the dimensions of groups of affine transformations from above. As an example, the method of I. P. Egorov is given for studying the dimensions of Lie algebras of affine vector fields on smooth manifolds equipped with linear connections having non-zero torsion tensor fields.

*Keywords:* linear algebra over a field, differentiations of linear algebra, Lie algebra, Lie algebra of differentiations.

*References*

1. *Vishnevskij, V. V., Shirokov, A. P., Shurygin, V. V.:* Spaces over algebras. Kazan' (1985).

2. *Egorov, I. P.:* Movements in spaces of affine connectivity. *Scientific Notes Penza Ped. Univ*. Kazan'. 5—179 (1965).

3. *Cartan, E., Ejlenberg, S.:* Homologous algebra. Moscow (1960).

4. *Kobayashi, Sh.:* Groups of transformations in differential geometry. Moscow (1986).

5. *Malcev, A. I.*: Fundamentals of Linear algebra. Moscow (1970).

6. *Yano, K.:* The theory of Lie derivaruves and its applications. Amsterdam (1957).