УДК 514.76

Ю. И. Шевченко

ДЕРИВАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ АКИВИСА И СТРУКТУРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПТЕВА НА ПОВЕРХНОСТИ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

В аффинном пространстве рассмотрена гладкая поверхность. С помощью деривационных формул и уравнений структуры аффинного пространства построены три пары Акивиса-Лаптева на поверхности. Показано, что поверхность аффинного пространства является голономным гладким многообразием.

The smooth surface in affine space is considered. With the derivation formulas and equations of the structure of an affine space constructed three pairs Akivis-Laptev on the surface. It is shown that the surface of an affine space is a holonomic smooth manifold.

Ключевые слова: деривационные формулы Акивиса, структурные уравнения Лаптева, голономное гладкое многообразие, поверхность аффинного пространства, касательные пространства высших порядков.

Key words: Akivis derivation formulas, Laptev structure equations, holonomic smooth manifold, surface of an affine space, tangent spaces of higher orders.

1. Пары Акивиса — Лаптева на гладком многообразии

Рассмотрим n-мерное гладкое многообразие M_n, для которого 1-я формула Акивиса [1; 2] имеет вид

$$dx = \theta^i \varepsilon_i \; (i, \ldots = \overline{1, n}), \tag{1}$$

где dx — смещение точки $x \in M_n$ с точностью до 1-го порядка; θ^i — линейные дифференциальные формы от параметров, определяющих перемещение точки x, ε_i — базисные векторы n-мерного линейного пространства $T^1 = T_n$, касающегося многообразия M_n в точке x. Эта формула позволяет записать цепочку эквивалентностей

$$x - \text{const} \leftrightarrow dx = \bar{0} \leftrightarrow \theta^i \varepsilon_i = \bar{0} \leftrightarrow \theta^i = 0,$$

в конце которой получились уравнения стационарности точки x. Полную интегрируемость системы $\theta^i = 0$ дает 1-я серия структурных уравнений Лаптева [2; 3]:

$$D\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i_j, \tag{2}$$

где D — символ внешнего дифференциала; $\wedge$ — знак внешнего умножения.

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2016. № 4. С. 24–31.

Замечание 1. В отличие от аффинного пространства A_n 1-ю формулу Акивиса на многообразии M_n нельзя проинтегрировать, но ее можно дифференцировать внешним образом (ср.: [2]).

Продолжим дифференциальное уравнение (1) в предположении, что dx — полный дифференциал, т. е. $D(dx)=\overline{0}$. Сначала замкнем уравнение (1) с использованием структурных уравнений (2):

$$(d\varepsilon_i-\theta_i^j\varepsilon_j)\wedge\theta^i=\overline{0},$$

где d — символ обычного дифференцирования. Теперь разрешим квадратичные уравнения по лемме Картана

$$d\varepsilon_i=\theta_i^j\varepsilon_j+\theta^j\varepsilon_{ij},\quad \varepsilon_{[ij]}=\overline{0}, \tag{3}$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование, а новые объекты ε_{ij} — симметричные касательные векторы 2-го порядка, или диффузоры (см., напр.: [1; 4—7]), принадлежащие соприкасающемуся пространству $T^2=T_{\frac{1}{2}n(n+3)}\supset T_n$. Известно, что векторы ε_i интерпретируются линейными дифференциальными операторами, а векторы 2-го порядка ε_{ij} можно проинтерпретировать дифференциальными операторами 2-го порядка. Формула (3) является 2-й деривационной формулой Акивиса на гладком многообразии M_n.

Продолжим структурные уравнения (2). Сначала замкнем их:

$$(D\theta_j^i-\theta_j^k\wedge\theta_k^i)\wedge\theta^j=0.$$

Теперь разрешим кубичные уравнения по лемме Лаптева [3]:

$$D\theta_j^i=\theta_j^k\wedge\theta_k^i+\theta^k\wedge\theta_{jk}^i, \tag{4}$$

причем для новых форм θ_{jk}^i выполняются условия

$$\theta_{jk}^i\wedge\theta^j\wedge\theta^k=0\leftrightarrow\theta_{[jk]}^i\wedge\theta^j\wedge\theta^k=0\leftrightarrow\theta_{[jk]}^i=\lambda_{jkl}^i\theta^l,\lambda_{(jk)l}^i=0,\lambda_{\{jkl\}}^i=0, \tag{5}$$

где круглые скобки обозначают симметрирование, а фигурные скобки — циклирование. Уравнения (4) образуют 2-ю серию структурных уравнений Лаптева на гладком многообразии M_n.

Определение 1. Поскольку деривационные формулы Акивиса (1), (3) и структурные уравнения Лаптева (2), (4) соответствуют друг другу, назовем (1), (2) — *1-й парой Акивиса — Лаптева*, а (3), (4) — 2-й парой Акивиса — Лаптева на гладком многообразии M_n.

2. Иерархия гладких многообразий

Определение 2. Если в формуле (5_1) $\lambda^i_{jkl} \neq 0$, т. е. формы θ^i_{jk} локально симметричны по нижним индексам, то M_n называется [8] *полуголономным гладким многообразием 1-го порядка* и обозначается M_n^S; если $\lambda^i_{jkl} = 0$, т. е. формы θ^i_{jk} симметричны, то M_n называется [5] *голономным гладким многообразием 1-го порядка* M_n^H.

Определение 3. Если условие (5_1) не выполняется, т. е. структурные уравнения (4) получены не продолжением уравнений (2), а, например, в результате факторизации, то назовем M_n *неголономным гладким многообразием 1-го порядка* M_n^N [5; 9].

При продолжении структурных уравнений (4) аналогично определяются голономные, полуголономные и неголономные гладкие многообразия 2-го порядка и далее — многообразия высших порядков.

Иерархия гладких многообразий 1-го порядка имеет вид

$$M_n^N \to M_n^S \to M_n^H \to A_n,$$

где стрелка означает, что каждое следующее многообразие — особый случай предыдущего.

3. Первая пара Акивиса — Лаптева на поверхности

Рассмотрим N-мерное аффинное пространство A_N с подвижным репером $\{A, e_I\}$ $(I, \ldots = \overline{1, N})$, деривационные формулы которого имеют вид

$$dA = \omega^I e_I, \quad de_I = \omega_I^J e_J, \tag{6}$$

где d — символ обычного дифференцирования в пространстве A_N.

Структурные формы ω^I, ω_I^J аффинной группы $GA(N)$, действующей в аффинном пространстве A_N, удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \quad D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I, \tag{7}$$

где D — символ внешнего дифференциала в пространстве A_N.

Утверждение 1. *Деривационная формула (6_1) и структурные уравнения (7_1) в аффинном пространстве A_N являются 1-й формулой Акивиса и 1-й серией уравнений Лаптева, а формулы (6_2) и уравнения (7_2) соответствуют особым случаям 2-й формулы Акивиса (3) и 2-й серии уравнений Лаптева (4).*

В аффинном пространстве A_N исследуем n-мерную гладкую поверхность S_n. Произведем разбиение значений индексов:

$$I = (i, \alpha); \quad i, \ldots = \overline{1, n}; \quad \alpha, \ldots = \overline{n+1, N}.$$

Совместим вершину A подвижного репера $\{A, e_I\}$ с текущей точкой поверхности S_n, тогда из формул (6_1) получим уравнения стационарности точки A: $\omega^I = 0$. Из главных форм ω^I выберем n независимых форм ω^i и выразим через них остальные главные формы ω^α:

$$\omega^\alpha = \Lambda_i^\alpha \omega^i. \qquad (8)$$

Получили пфаффовы уравнения поверхности S_n.

Запишем деривационную формулу (6_1) подробнее и подставим в нее уравнения (8):

$$\partial A = \omega^i E_i, \qquad E_i = e_i + \Lambda_i^\alpha e_\alpha, \qquad (9)$$

где $\partial = d|_{S_n}$ — символ обычного дифференцирования вдоль S_n.

Подставим уравнения (8) в часть структурных уравнений (7_1) для базисных форм ω^i:

$$\overline{D}\omega^i = \omega^j \wedge \Omega_j^i, \qquad \Omega_j^i = \omega_j^i + \Lambda_j^\alpha \omega_\alpha^i, \qquad (10)$$

где $\overline{D} = D|_{S_n}$ — символ внешнего дифференцирования вдоль S_n.

Утверждение 2. *Деривационная формула (9_1) и структурные уравнения (10_1) образуют 1-ю пару Акивиса — Лаптева для поверхности S_n в аффинном пространстве A_N.*

4. Вторая пара Акивиса — Лаптева на поверхности

Продолжая пфаффовы уравнения (8), получим

$$\Delta' \Lambda_i^\alpha + \omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega^j, \qquad \Lambda_{[ij]}^\alpha = 0, \qquad (11)$$

где псевдотензорный [5, с. 46] дифференциальный оператор Δ' действует следующим образом:

$$\Delta' \Lambda_i^\alpha = \partial \Lambda_i^\alpha + \Lambda_i^\beta \omega_\beta^\alpha - \Lambda_j^\alpha \Omega_i^j.$$

Дифференциальные уравнения (11_1) можно представить в другом виде:

$$\Delta \Lambda_i^\alpha - \Lambda_j^\alpha \Lambda_i^\beta \omega_\beta^j + \omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega^j, \qquad (12)$$

где Δ — тензорный дифференциальный оператор:

$$\Delta \Lambda_i^\alpha = \partial \Lambda_i^\alpha + \Lambda_i^\beta \omega_\beta^\alpha - \Lambda_j^\alpha \omega_i^j.$$

Совокупность функций Λ_i^α называется *фундаментальным объектом 1-го порядка поверхности S_n*. Из дифференциальных уравнений (12) следует

Утверждение 3. *Фундаментальный объект 1-го порядка Λ_i^α поверхности S_n является квадратично-квазитензорным геометрическим объектом, который определяет базис E_i (9_2) n-мерной касательной плоскости $\tau^1 = \tau_n$ к поверхности S_n в точке A и продолжения Ω_j^i (10_2) базисных форм ω^i.*

С помощью деривационных формул (6_2) найдем дифференциалы векторов E_i, являющихся направляющими для касательной плоскости τ_n:

$$\partial E_i = \Omega_i^j e_j + (\partial \Lambda_i^\alpha + \Lambda_i^\beta \omega_\beta^\alpha + \omega_i^\alpha) e_\alpha .$$

Подставим выражения векторов e_i из равенств (9_2):

$$\partial E_i = \Omega_i^j E_j + (\nabla' \Lambda_i^\alpha + \omega_i^\alpha) e_\alpha .$$

Воспользуемся дифференциальными уравнениями (11_1):

$$\partial E_i = \Omega_i^j E_j + \omega^j E_{ij}, \quad E_{ij} = \Lambda_{ij}^\alpha e_\alpha . \tag{13}$$

Формула (13_1) показывает инвариантность касательной плоскости $\tau_n = [A, E_i]$.

В силу условия (11_2) векторы E_{ij} симметричны. В общем случае их число равно $C_n^2 + n = \dfrac{1}{2} n(n+1)$. Если это число меньше количества векторов e_α:

$$\frac{1}{2} n(n+1) < N - n \quad \to \quad N > \frac{1}{2} n(n+3),$$

то существует соприкасающаяся плоскость

$$\tau^2 = \tau_{\frac{1}{2}n(n+3)} = [A, \tau_n, E_{ij}].$$

С помощью формул (9_1), (13_1) найдем 2-й обычный дифференциал точки A вдоль поверхности S_n:

$$\partial^2 A = (\partial \omega^i + \omega^j \Omega_j^i) E_i + \omega^i \omega^j E_{ij},$$

откуда видно, что соприкасающаяся плоскость τ^2 касается поверхности S_n в точке A с точностью до 2-го порядка.

Используя структурные уравнения (7_2) возьмем внешние дифференциалы форм Ω_j^i:

$$\overline{D} \Omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + (\partial \Lambda_j^\alpha + \Lambda_j^\beta \omega_\beta^\alpha + \omega_j^\alpha) \wedge \omega_\alpha^i + \Lambda_j^\alpha \omega_\alpha^k \wedge \omega_k^i . \tag{14}$$

Преобразуем 1-е слагаемое, внося в него формы Ω_j^i с помощью равенств (10_2):

$$\omega_j^k \wedge \omega_k^i = \Omega_j^k \wedge \Omega_k^i - \omega_j^k \wedge \Lambda_k^\alpha \omega_\alpha^i - \Lambda_j^\alpha \omega_\alpha^k \wedge \omega_k^i - \Lambda_j^\beta \omega_\beta^k \wedge \Lambda_k^\alpha \omega_\alpha^i .$$

Подставим эти выражения в формулу (14):

$$\overline{D} \Omega_j^i = \Omega_j^k \wedge \Omega_k^i + (\Delta \Lambda_j^\alpha - \Lambda_j^\beta \Lambda_k^\alpha \omega_\beta^k + \omega_j^\alpha) \wedge \omega_\alpha^i .$$

Воспользуемся дифференциальными уравнениями (12):

$$\overline{D}\Omega^i_j = \Omega^k_j \wedge \Omega^i_k + \omega^k \wedge \Omega^i_{jk}, \quad \Omega^i_{jk} = \Lambda^\alpha_{jk}\omega^i_\alpha. \qquad (15)$$

Утверждение 4. *Деривационные формулы (13₁) и структурные уравнения (15₁) образуют 2-ю пару Акивиса – Лаптева для поверхности S_n.*

При альтернации форм (15₂) по нижним индексам с учетом условия (11₂) имеем

$$\Omega^i_{[jk]} = 0, \qquad (16)$$

откуда следует

Утверждение 5. *Поверхность S_n в аффинном пространстве A_N является голономным гладким многообразием 1-го порядка.*

5. Третья пара Акивиса — Лаптева на поверхности

Продолжим дифференциальные уравнения (11₁):

$$\Delta'\Lambda^\alpha_{ij} - \Lambda^\alpha_k\Omega^k_{ij} = \Lambda^\alpha_{ijk}\omega^k, \qquad \Lambda^\alpha_{i[jk]} = 0. \qquad (17)$$

При альтернировании этих уравнений по индексам i, j с учетом условий симметрии (11₂), (16), получим

$$\Lambda^\alpha_{[ij]k}\omega^k = 0 \;\rightarrow\; \Lambda^\alpha_{[ij]k} = 0. \qquad (18)$$

Из соотношений (17₂), (18₂) следует

Утверждение 6. *Компоненты Λ^α_{ijk} фундаментального объекта 3-го порядка $\{\Lambda^\alpha_i, \Lambda^\alpha_{ij}, \Lambda^\alpha_{ijk}\}$ поверхности S_n симметричны по всем нижним индексам.*

Продифференцируем обычным образом выражения (13₂) векторов E_{ij} с помощью деривационных формул (6₂):

$$\partial E_{ij} = (\partial\Lambda^\alpha_{ij} + \Lambda^\beta_{ij}\omega^\alpha_\beta)e_\alpha + \Lambda^\alpha_{ij}\omega^k_\alpha e_k.$$

Используем дифференциальные уравнения (17₁):

$$\partial E_{ij} = (\Lambda^\alpha_{ijk}\omega^k + \Lambda^\alpha_{kj}\Omega^k_i + \Lambda^\alpha_{ik}\Omega^k_j + \Lambda^\alpha_k\Omega^k_{ij})e_\alpha + \Lambda^\alpha_{ij}\omega^k_\alpha e_k.$$

Раскроем скобки и воспользуемся обозначением (13₂):

$$\partial E_{ij} = \omega^k E_{ijk} + \Omega^k_i E_{kj} + \Omega^k_j E_{ik} + \Omega^k_{ij}\Lambda^\alpha_k e_\alpha + \Lambda^\alpha_{ij}\omega^k_\alpha e_k, \qquad (19)$$

$$E_{ijk} = \Lambda^\alpha_{ijk}e_\alpha. \qquad (20)$$

Обозначения (9₂), (15₂) позволяют преобразовать сумму последних двух слагаемых в формуле (19):

$$\partial E_{ij} = \Omega^k_i E_{kj} + \Omega^k_j E_{ik} + \Omega^k_{ij}E_k + \omega^k E_{ijk}. \qquad (21)$$

Эта формула показывает инвариантность соприкасающейся плоскости τ^2 при фиксации точки $A \in S_n$.

Из утверждения 6 в силу обозначения (20) следует, что векторы E_{ijk} симметричны по всем индексам. В общем случае их число равно

$$C_n^3 + 2C_n^2 + n = \frac{n}{6}(n^2 + 3n + 2).$$

Если это число в сумме с числом $\frac{n}{2}(n+1)$ векторов E_{ij} меньше количества векторов e_α :

$$\frac{n}{6}(n^2 + 3n + 2) + \frac{n}{2}(n+1) < N - n \quad \to \; N > \frac{n}{6}(n^2 + 6n + 11),$$

то существует $\frac{n}{6}(n^2 + 6n + 11)$ - мерная касательная плоскость 3-го порядка $\tau^3 = [A, \tau^1, \tau^2, E_{ijk}]$, причем $A \in \tau^1 \subset \tau^2 \subset \tau^3$.

Замечание 2. Для поверхности S_n в аффинном пространстве A_N существует последовательность касательных пространств высших порядков τ^k $(k = \overline{1, k_0})$, причем $\dim \tau^{k_0} < N$, а касательное пространство $(k_0 + 1)$-го порядка вырождается: $\tau^{k_0+1} = A_N$. Если аффинное пространство бесконечномерно, то последовательность касательных пространств поверхности $S_n \subset A_\infty$ бесконечна, как на гладком многообразии M_n.

Найдем внешние дифференциалы форм Ω^i_{jk}. Дифференцируем их выражения (15₂) с помощью структурных уравнений (7₂):

$$\overline{D}\Omega^i_{jk} = (\partial\Lambda^\alpha_{jk} + \Lambda^\beta_{jk}\omega^\alpha_\beta) \wedge \omega^i_\alpha + \Lambda^\alpha_{jk}\omega^l_\alpha \wedge \omega^i_l.$$

Используем дифференциальные уравнения (17₁):

$$\overline{D}\Omega^i_{jk} = (\Lambda^\alpha_{jkl}\omega^l + \Lambda^\alpha_{lk}\Omega^l_j + \Lambda^\alpha_{jl}\Omega^l_k + \Lambda^\alpha_l\Omega^l_{jk}) \wedge \omega^i_\alpha + \Lambda^\alpha_{jk}\omega^l_\alpha \wedge \omega^i_l.$$

Раскроем скобки и воспользуемся обозначением (15₂):

$$\overline{D}\Omega^i_{jk} = \omega^l \wedge \Omega^i_{jkl} + \Omega^l_j \wedge \Omega^i_{lk} + \Omega^l_k \wedge \Omega^i_{jl} + \Omega^l_{jk} \wedge \Lambda^\alpha_l\omega^i_\alpha + \Lambda^\alpha_{jk}\omega^l_\alpha \wedge \omega^i_l, \tag{22}$$

$$\Omega^i_{jkl} = \Lambda^\alpha_{jkl}\omega^i_\alpha. \tag{23}$$

Добавим и вычтем слагаемое $\Omega^l_{jk} \wedge \Omega^i_l$ в формуле (22):

$$\overline{D}\Omega^i_{jk} = \Omega^l_{jk} \wedge \Omega^i_l - \Omega^i_{lk} \wedge \Omega^l_j - \Omega^i_{jl} \wedge \Omega^l_k + \omega^l \wedge \Omega^i_{jkl} +$$
$$+ \Omega^l_{jk} \wedge \Lambda^\alpha_l\omega^i_\alpha + \Lambda^\alpha_{jk}\omega^l_\alpha \wedge \omega^i_l - \Omega^l_{jk} \wedge \Omega^i_l.$$

При раскрытии обозначений (10₂, 15₂) во 2-й строке слагаемые взаимно уничтожаются, поэтому

$$\overline{D}\Omega^i_{jk} = \Omega^l_{jk} \wedge \Omega^i_l - \Omega^i_{lk} \wedge \Omega^l_j - \Omega^i_{jl} \wedge \Omega^l_k + \omega^l \wedge \Omega^i_{jkl}. \tag{24}$$

Утверждение 7. *Деривационные формулы (21) и структурные уравнения (24) составляют 3-ю пару Акивиса — Лаптева для поверхности* S_n.

Из утверждения 6 с учетом обозначения (23) следует

Утверждение 8. *Поверхность* S_n *является голономным гладким многообразием 2-го порядка.*

С помощью теоремы Поляковой [10] можно сформулировать

Утверждение 9. *Поверхность* S_n *в аффинном пространстве* A_N *является голономным гладким многообразием любого порядка, т. е. просто голономным многообразием.*

Список литературы

1. *Акивис М. А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977.

2. *Евтушик Л. Е.* Уникальная школа Картана — Лаптева, ее сбережение // Дифф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2008. Вып. 39. С. 44—62.

3. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. Семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

4. *Рыбников А. К.* Об аффинных связностях второго порядка // Матем. заметки. 1981. Том 29, вып. 2. С. 279—290.

5. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

6. *Catuogno P.* On stochastic parallel transport and prolongation of connections // Revista de la Unión Mathemática Argentina. 1999. Vol. 41, № 3. P. 107–118.

7. *Emery M.* An invitation to second-order stochastic differential geometry. 2007. URL: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00145073 (дата обращения: 20.09.2016).

8. *Шевченко Ю. И.* Голономные и полуголономные подмногообразия гладких многообразий // Дифф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 168—177.

9. *Shevchenko Ju. I., Skrydlova E. V.* About non-holonomicity of quotient manifold of holonomic distribution on semi-holonomic smooth manifold // Междун. конф. по алгебре, анализу и геометрии. Казань, 2016. С. 67—68.

10. *Полякова К. В.* О голономности поверхности проективного пространства // XXX науч. конф. проф.-преп. состава, науч. сотр. асп. и студ. : тез. докл. Калининград, 1999. Ч. 6. С. 7—8.

Об авторе

Юрий Иванович Шевченко — канд. физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: ESkrydlova@kantiana.ru

About author

Dr Yuri Shevchenko — Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: ESkrydlova@kantiana.ru