Библиографический список

1. Малаховский В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур // Дифференциальная геометрия многообразий фигур / Калининград, 1973. Вып.3. С.41-49.

2. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.6. С.113-133.

T. P. F u n t i k o w a

DEGENERATED COMPLEXES GENERATED BY A QUADRIC AND A POINT NONINCIDENT TO THE QUADRIC

The author consideres degenerated complexes $(QP)_{3,2}$ in the three-dimensional affine space generated by a quadric Q and a point P nonincident to the quadric, where the manifold of quadrics Q is three-dimensional, and the set of points is two-dimensional. The class of degenerated complexes $(QP)_{3,2}$ is studied for which centers of quadrics Q describe a line (P*).

The correspondence between the generating elements of the degenerated complex $(QP)_{3,2}$ is estableshed by which to each quadric Q corresponds a single point P, whose pre-image is a one-parametric family of quadrics Q_p . The correspondence is also estableshed between the sets of points (P*) and (P) by which to each point P* corresponds a line Γ_{p^*} on the supface (P).

Degenerated complexes $(QP)_{3,2}$ are studied in detail for which three focal points of the quadric Q define mutially conjugate directions with respect to the quadric Q, where one of these directions coincides with the direction of the tangent to the line (P*). It is proved that there exists two classes of such complexes and their geometric characteristic is obtained, characteristic and focal manifolds of the quadric Q are found.

УДК 514.754.7

ОПЕРАТОР ХОДЖА НА МНОГООБРАЗИИ С ЭКВИАФФИННОЙ СТРУКТУРОЙ[1]

И.И. Ц ы г а н о к , С.Е. С т е п а н о в

(Владимирский государственный педагогический университет)

1. Настоящая работа является продолжением серии статей авторов [1] - [3] по геометрии n-мерного многообразия с эквиаффинной структурой [4]. Доказывает-

[1] Работа написана при поддержке РФФИ , проект 94 - 01 - 01595

ся, что (n-1)-форма, двойственная специальному конциркулярному векторному полю относительно n-формы объема, является аффинно- киллинговой .

2. Полагаем M n-мерным дифференцируемым многообразием с аффинной связностью ∇ без кручения. В окрестности U на M с локальной системой координат $x^1,\dots,x^n$ рассмотрим геодезическую $\gamma\colon x^i = x^i(s)$, отнесенную к аффинному параметру s. В этом случае

$$\frac{dx^j}{ds}\nabla_j \frac{dx^i}{ds} = 0 \ .$$

Пусть $\omega_{i_1\dots i_p}$ - компоненты произвольной p-формы в U, тогда величина $\omega_{i_1\dots i_{p-1}i}\dfrac{dx^i}{ds}$ останется ковариантно постоянной вдоль любой геодезической γ тогда и только тогда, когда

$$\frac{dx^j}{ds}\nabla_j(\omega_{i_1\dots i_{p-1}i}\frac{dx^i}{ds}) = \tfrac{1}{2}(\nabla_j\omega_{i_1\dots i_{p-1}i} + \nabla_i\omega_{i_1\dots i_{p-1}j})\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0 \ ,$$

т.е. в том случае, когда

$$\nabla_j\omega_{i_1\dots i_{p-1}i} + \nabla_i\omega_{i_1\dots i_{p-1}j} = 0 \ . \tag{1}$$

Такую p-форму $\omega_{i_1\dots i_p}$ мы будем называть (по аналогии с [5, с.55]) аффинно-киллинговой. Из (1) следует, что $\nabla_i\omega_{i_1\dots i_p}$ антисимметрична по всем индексам и, следовательно, (1) равносильно следующему уравнению:

$$\nabla_{[i}\omega_{i_1\dots i_p]} = \nabla_i\omega_{i_1\dots i_p} \ , \tag{2}$$

которому можно придать вид уравнения киллинговой p-формы на римановом многообразии:

$$(p+1)\nabla\omega = d\omega \ .$$

3. Эквиаффинной структурой на n-мерном многообразии M называется $[4]$ пара (∇, η), где ∇ - аффинная связность без кручения и η-ковариантно постоянная n-форма объема.

В присутствии n-формы объема η можно задать операцию * отождествления кососимметрических тензоров типов (p, 0) и (0, n-p). Если $\omega^{i_1\dots i_p}$ - кососимметрический тензор типа (p, 0) , то через $(*\omega)_{i_1\dots i_{n-p}}$ будет обозначаться кососимметрический тензор типа (0 , n-p), задаваемый равенством

$$(*\omega)_{j_1\dots j_{n-p}} = \frac{1}{p!}\eta_{j_1\dots j_{n-p}i_1\dots i_p}\omega^{i_1\dots i_p} \ .$$

Далее, для n-формы η с компонентами $\eta_{i_1 \dots i_n}$ построим взаимный ей n - тензор $\eta^{i_1 \dots i_n}$, связанный с ней условиями

$$\eta^{i_1 \dots i_n} \eta_{j_1 \dots j_n} = n!\delta^{i_1 \dots i_n}_{[j_1 \dots j_n]}$$

и положим по определению

$$(*\omega)^{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{(n-p)!} \eta^{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_{n-p}} \omega_{j_1 \dots j_{n-p}} ,$$

тогда

$$*^2 = (-1)^{p(n-p)} \mathrm{id} .$$

Кроме того, условие $\nabla_k \eta^{i_1 \dots i_n} = 0$ очевидно равносильно условию $\nabla_k \eta_{j_1 \dots j_n} = 0$.

4. Пусть ξ^i - специальное концциркулярное векторное поле на M, определяемое $[6]$ уравнением $\nabla_j \xi^i = \lambda \delta^i_j$, где $\lambda = \frac{1}{n} \nabla_i \xi^i$. Полагаем, что многообразие M оснащено эквиаффинной структурой (∇, η), тогда для n-p специальных концциркулярных векторных полей $\xi^i_{(p+1)} \dots \xi^i_{(n)}$ из

$$\omega_{i_1 \dots i_p} = \eta_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_n} \xi^{i_{p+1}}_{(p+1)} \dots \xi^{i_n}_{(n)}$$

после ковариантного дифференцирования будем иметь

$$\nabla_i \omega_{i_1 \dots i_p} = \eta_{i_1 \dots i_p i i_{p+2} \dots i_n} \times$$

$$\times \left\{ \lambda_{p+1} \xi^{i_{p+2}}_{(p+2)} \dots \xi^{i_n}_{(n)} - \lambda_{p+2} \xi^{i_{p+2}}_{(p+1)} \dots \xi^{i_n}_{(n)} + \dots + (-1)^{n-p-1} \lambda_n \xi^{i_{p+2}}_{(p+1)} \dots \xi^{i_n}_{(n-1)} \right\},$$

а потому $\omega_{i_1 \dots i_p}$ подчиняется уравнению (2). Доказана

Теорема. *Пусть на n-мерном многообразии M с эквиаффинной структурой* (∇, η) *имеется n - p линейно независимых специальных концциркулярных векторных полей* $\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(n-p)}$. *Тогда p-форма* $*\omega$, *дуальная относительно формы объема* η *тензору* $\omega = \xi_{(1)} \wedge \dots \wedge \xi_{(n-p)}$, *будет аффинно-киллинговой*.

В работах авторов $[2]$ и $[3]$ было доказано, что на n-мерном многообразии M с эквипроективной структурой (∇, η), которая характеризуется следующим строением тензора кривизны:

$$R^{i}_{jkl} = \frac{1}{n-1}(\delta^{i}_{k} R_{jl} - \delta^{i}_{l} R_{jk}) \ ,$$

существуют n линейно независимых специальных концициркулярных векторных полей $\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(n)}$. На основании этого факта можно сформулировать

Следствие. *На n-мерном многообразии M с эквипроективной структурой* (∇, η) *существуют по меньшей мере n!/p!(n-p)! линейно независимых аффинно-киллинговых p-форм* .

Библиографический список

1. Цыганок И.И. Аффинный аналог метода Яно-Бохнера // Тезисы докл. конф. “Проблемы теоретической и прикладной математики“. Тарту: Изд-во Тартуского ун-та, 1990. С.76-78.

2. Степанов С.Е., Цыганок И.И. Техника Бохнера в аффинной дифференциальной геометрии // Алгебраические методы в геометрии. М.: Изд-во Российского ун-та дружбы народов, 1992 . С. 50- 5 .

3. Stepanov S.E., Tsyganok I.I. Vector fields in manifold with equiaffine connection // Webs and Qusigroups, Tver: Tver State University, 1993. P. 70-77.

4. Nomizu K. What is affine differential geometry? // Proc. Conf. on Diff. Geom. Munster, 1982. P. 42-43.

5 . Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. М.: ИЛ, 1957. 152с.

6. Yano K. On the torse-forming direction in a Riemannian space // Proc. Imp. Acad. 1944. V. 20. P.340-345.

I. I. T s y g a n o k , S. E. S t e p a n o v

HODRE'S OPERATOR ON THE MANIFOLD WITH THE EQUIAFFINE STRUCTURE

The authors considere an n-dimensional manifold M with the equiaffine structure (∇, η). It is proved that (n-1)-form, dual to the special concircular vector field with respect to a n-form of the valume η , is an affine-killing.

УДК 514.75

К ГЕОМЕТРИИ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ ПАРЫ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

М.А. Ч е ш к о в а

(Алтайский государственный университет)