3. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.
4. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Тр. геом. семинара. М., 1971. Т. 3. С 49—94.
5. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии. Итоги науки и техн. / ВИНИТИ. М., 1975. Т. 7. С. 117—151.

N. Eliseeva

Fields of the fundamental and enveloped objects of hypersurface Ω_{n-1} equipped with distributions

The research of hypersurface $\Omega_{n-1} \subset P_n$ with three strongest mutual subbundles proceeds [1]. The fields of the fundamental and enveloped geometrical objects of hypersurface equipped with distributions are constructed.

УДК 514.75

М.В. Кретов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
blta@mail.ru

Об одном комплексе однополостных гиперболоидов

Исследуются в трехмерном эквиаффинном пространстве комплексы (трехпараметрические семейства) однополостных гиперболоидов, у которых центр луча прямолинейной конгруэнции осей однополостного гиперболоида описывает линии с касательными, параллельными первому координатному вектору, а индикатрисы координатных векторов являются прямыми, параллельными этим векторам. Доказана теорема существования исследуемого многообразия. Геометрически охарактеризованы характеристическое и фокальное многообразия образующего элемента рассматриваемого комплекса. Получены для него геометрические свойства.

Ключевые слова: комплекс, конгруэнция, репер, однополостный гиперболоид, характеристическое многообразие, фокальное многообразие, индикатриса вектора.

В трехмерном эквиаффинном пространстве исследуются трехпараметрические семейства КОГ_3 (комплексы) однополостных гиперболоидов q по методике, используемой в работах [1—7].

Отнесем комплексы КОГ_3 к реперу $r = \left\{A, \overline{e_i}\right\}$, i, j, $k = \overline{1,3}$, где A — центр луча прямолинейной конгруэнции Z_2 осей однополостного гиперболоида, векторы $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ лежат в касательной плоскости S к поверхности центров и сопряжены между собой, концы этих векторов принадлежат сечению однополостного гиперболоида касательной плоскостью S, вектор $\overline{e_3}$ сопряжен с векторами $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$, и его конец принадлежит однополостному гиперболоиду. Тогда уравнение однополостного гиперболоида запишется в виде

$$F \equiv \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2 - 1 = 0. \tag{1}$$

Дифференцируя уравнение (1) с учетом уравнений стационарности точки $dx^i = -x^k \omega_k^i - \omega^i$, получим

$$dF = -2\left(x^1\right)^2 \omega_1^1 - 2\left(x^2\right)^2 \omega_2^2 + 2\left(x^3\right)^2 \omega_3^3 - 2x^1x^2\left(\omega_2^1 + \omega_1^2\right) - 2x^1x^3\left(\omega_3^1 - \omega_1^3\right) -$$

$$-2x^2x^3\left(\omega_3^2 - \omega_2^3\right) - 2x^1\omega^1 - 2x^2\omega^2 + 2x^3\omega^3,$$

следовательно, формы Пфаффа ω_1^1, ω_2^2, ω_3^3, $\omega_2^1 + \omega_1^2$, $\omega_3^1 - \omega_1^3$, $\omega_3^2 - \omega_2^3$, ω^1, ω^2, ω^3 можно взять за структурные формы однополостного гиперболоида q. Рассмотрим трехпараметрическое семейство однополостных гиперболоидов, выбрав за базис $\theta^1 = \omega_1^1$, $\theta^2 = \omega_2^2$, $\theta^3 = \omega_3^3$. Тогда система уравнений Пфаффа комплекса КОГ$_3$ запишется в виде

$$\omega^i = A_j^i \theta^j, \omega_1^2 + \omega_2^1 = B_i \theta^i, \ \omega_3^1 - \omega_1^3 = C_i \theta^i, \omega_3^2 - \omega_2^3 = D_i \theta^i. \qquad (2)$$

Согласно выбору канонического репера: $\omega^3 = 0$. Замыкая последнее уравнение и используя лемму Картана, получим

$$\omega_1^3 = \lambda_{11}\omega^1 + \lambda_{12}\omega^2, \ \omega_2^3 = \lambda_{12}\omega^1 + \lambda_{22}\omega^2. \qquad (3)$$

Выделим из комплексов КОГ$_3$ комплексы КОГ$_3^*$, у которых центр A луча конгруэнции Z_2 описывает линии с касательными, параллельными вектору $\overline{e_1}$, индикатрисы векторов $\overline{e_i}$ являются прямыми, параллельными этим векторам.

Поскольку $dA = \omega^1 \overline{e_1} + \omega^2 \overline{e_2}$, $d\overline{e_1} = \omega_1^1 \overline{e_1} + \omega_1^2 \overline{e_2} + \omega_1^3 \overline{e_3}$, $d\overline{e_2} = \omega_2^1 \overline{e_1} + \omega_2^2 \overline{e_2} + \omega_2^3 \overline{e_3}$, $d\overline{e_3} = \omega_3^1 \overline{e_1} + \omega_3^2 \overline{e_2} + \omega_3^3 \overline{e_3}$, то система уравнений Пфаффа (1) для комплексов КОГ$_3^*$ примет вид

$$\omega^1 = A_j^i \theta^j, \ \omega_1^2 = \omega_2^1 = \omega_1^3 = \omega_3^1 = \omega_3^2 = \omega_2^3 = \omega^2 = \omega^3 = 0. \qquad (4)$$

Анализируя систему дифференциальных уравнений (4) в соответствии с методикой, содержащейся в работе [8], убеждаемся в том, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Комплексы КОГ$_3^*$ существуют и определяются с произволом одной функции трех аргументов.*

Характеристическое многообразие [9] однополостного гиперболоида q задается системой уравнений

$$F_1 = 0, \ F_2 = 0, \ F_3 = 0, \qquad (5)$$

где F_k удовлетворяют уравнению $-\frac{1}{2} dF = F_k \theta^k$.

Для комплексов КОГ $^*_3$ система уравнений (5) имеет вид

$$A_1^1 x^1 + \left(x^1\right)^2 = 0\,,\ A_2^1 x^1 + \left(x^2\right)^2 = 0\,,\ A_3^1 x^1 - \left(x^3\right)^2 = 0\,. \qquad (6)$$

Обозначим через $\alpha = \sqrt{A_1^1 A_2^1}$, $\beta = \sqrt{-A_1^1 A_3^1}$. Из системы (6) вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Характеристическое многообразие [9] однополостного гиперболоида, описывающего комплекс КОГ$^*_3$, состоит из пяти точек: центра луча прямолинейной конгруэнции Z_2 и четырех вершин параллелограмма, имеющих следующие координаты:*

$$\left(-A_1^1, \alpha, -\beta\right),\ \left(-A_1^1, \alpha, \beta\right),\ \left(-A_1^1, -\alpha, \beta\right) \text{ и } \left(-A_1^1, -\alpha, -\beta\right).$$

Фокальное многообразие [9] однополостного гиперболоида, описывающего комплексы КОГ$^*_3$, задается системой уравнений (6) и уравнением (1). Из определения фокального многообразия однополостного гиперболоида, описывающего исследуемое многообразие, следует

Теорема 3. *Фокальное многообразие [9] однополостного гиперболоида, описывающего комплекс КОГ$^*_3$, состоит из одной точки $\left(A_1^1, \alpha, \beta\right)$, координаты которой лежат на гиперболическом цилиндре: $\left(A_1^1\right)^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 1 = 0$, в противном случае оно является пустым множеством.*

Обозначая через A_i концы векторов $\overline{e_i}$, M_i — текущие точки координатных осей $\left(A, \overline{e_i}\right)$, M_{3+i} — текущие точки координатных плоскостей $\left(\mathrm{A}, \overline{e_1}, \overline{e_2}\right)$, $\left(\mathrm{A}, \overline{e_1}, \overline{e_3}\right)$ и $\left(\mathrm{A}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\right)$ получаем:

$$dA = A_j^1\theta^j\overline{e_1},\ d\overline{e_1} = \theta^1\overline{e_1},\ d\overline{e_2} = \theta^2\overline{e_2},\ d\overline{e_3} = \theta^3\overline{e_3},$$

$$dA_1 = \left(A_j^1\theta^j + \theta^1\right)\overline{e_1},\ dA_2 = A_j^1\theta^j\overline{e_1} + \theta^2\overline{e_2},$$

$$dA_3 = A_j^1\theta^j\overline{e_1} + \theta^3\overline{e_3},\ dM_1 = \left(A_j^1\theta^j + x^1\theta^1 + dx^1\right)\overline{e_1},$$

$$dM_2 = A_j^1\theta^j\overline{e_1} + \left(x^2\theta^2 + dx^2\right)\overline{e_2},$$

$$dM_3 = A_j^1\theta^j\overline{e_1} + \left(x^3\theta^3 + dx^3\right)\overline{e_3},$$

$$dM_4 = \left(A_j^1\theta^j + x^1\theta^1 + dx^1\right)\overline{e_1} + \left(x^2\theta^2 + dx^2\right)\overline{e_2}, \tag{7}$$

$$dM_5 = \left(A_j^1\theta^j + x^1\theta^1 + dx^1\right)\overline{e_1} + \left(x^3\theta^3 + dx^3\right)\overline{e_3},$$

$$dM_6 = A_j^1\theta^j\overline{e_1} + \left(x^2\theta^2 + dx^2\right)\overline{e_2} + \left(x^3\theta^3 + dx^3\right)\overline{e_3}.$$

Анализируя и дифференцируя формулы (7), получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Комплексы* $КОГ_3^*$ *обладают следующими геометрическими свойствами:*

1) центр луча прямолинейной конгруэнции Z_2 *осей образующего элемента описывает комплекс линий с касательными, параллельными вектору* $\overline{e_1}$*;*

2) конец вектора $\overline{e_1}$*, точки координатной прямой* $\left(\mathrm{A},\overline{e_1}\right)$*, а также координатных плоскостей* $\left(\mathrm{A},\overline{e_1},\overline{e_2}\right)$ *и* $\left(\mathrm{A},\overline{e_1},\overline{e_3}\right)$ *неподвижны;*

3) концы векторов $\overline{e_2}$ *и* $\overline{e_3}$*, а также точки координатных прямых* $\left(\mathrm{A},\overline{e_2}\right)$ *и* $\left(\mathrm{A},\overline{e_3}\right)$ *описывают цилиндрические поверхности с образующими, параллельными вектору* $\overline{e_1}$*.*

Список литературы

1. *Кретов М.В.* Комплексы эллипсоидов в аффинном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1979. Вып. 10. С. 41—47.

2. *Кретов М.В.* Об одном комплексе центральных квадрик с вырождающимся многообразием центров // Материалы VII Всесоюзной конференции по современным проблемам геометрии. Минск, 1979. С. 99.

3. *Кретов М.В.* К геометрии комплексов эллипсоидов в аффинном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1985. Вып. 16. С. 34—36.

4. *Кретов М.В.* Комплексы эллиптических цилиндров // Там же, 2005. Вып. 36. С. 61—64.

5. *Кретов М.В.* О трехпараметрическом семействе квадрик в аффинном пространстве // Вестник РГУ им. И. Канта. Калининград, 2008. Вып. 10. С. 95—98.

6. *Кретов М.В.* Комплексы эллиптических параболоидов // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2010. Вып. 41. С. 35—38.

7. *Кретов М.В.* Комплексы конусов // Там же, 2012. Вып. 43. С. 45—49.

8. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

9. *Малаховский В.С., Махоркин В.В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1974. Вып. 6. С. 113—133.

M. Kretov

A complex hyperboloid of one sheet

We study in three-dimensional equiaffine space complexes (three-parametrical family) hyperboloid of one sheet, in which the center axis of the beam straight congruence hyperboloid of one sheet describes the tangent line parallel to the first coordinate vector, and the indicatrix coordinate vectors are lines parallel to these vectors. The theorem of existence of the investigated diversity. Characterized geometrically characteristic and focal manifolds forming element of this complex. Obtained for him geometric properties.