ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.15 1984

УДК 514.75

Е.А. Митрофанова

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ G-СТРУКТУР РЕПЕРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ГЛАВНЫМ РАССЛОЕНИЕМ ГРУППЫ $A^p_m(n)$ НАД БАЗОЙ R^n

Рассмотрим группу Ли $A^p_m(n)$ преобразований пространства R^n, считая, что она действует левосторонним образом:

$$\tilde{x}=f(a,x)=\begin{cases}\tilde{x}^i=a^i_k x^k+a^i,\\ \tilde{x}^u_v=a^u_v x^v+a^u+a^u_i x^i+\ldots+\frac{1}{p!}a^u_{i_1\ldots i_p}x^{i_1}\ldots x^{i_p},\end{cases}\quad(1)$$

где $\det\|a^i_k\|\neq 0$, $\det\|a^u_v\|\neq 0$, $i,j,k=\overline{1,m}$; $u,v,w=\overline{m+1,n}$; $p=1,2,\ldots$

В силу действия (1) группы $A^p_m(n)$ в исследовании геометрических образов в R^n важную роль играет главное расслоение $A^p_m(n)\xrightarrow{\pi}R^n$. Опишем это расслоение и соответствующую ему последовательность G-структур [1] реперов высших порядков, ассоциированных с R^n. Отметим, что каждое из однородных представлений группы $A^p_m(n)$ порождает соответствующее главное расслоение группы $A^p_m(n)$ на левые классы смежности по соответствующей стационарной подгруппе. В случае однородного пространства $R^n(\ell^i,\ell^u)$ такой подгруппой G является группа изотропии элемента $0\in R^n$ $(\ell^i=\ell^u=0)$. Ее левоинвариантные формы получаются из левоинвариантных форм группы $A^p_m(n)$:

$$\theta^i=\tilde{a}^i_j\,da^j,\quad \theta^j_k=\tilde{a}^j_i\,da^i_k,$$

$$\theta^v=\tilde{a}^v_u(da^u-t^u_i\,da^i),\quad \theta^w_u=\tilde{a}^w_v\,da^v_u,\quad(2)$$

$$\theta^w_i=\tilde{a}^w_u a^k_i\,(dt^u_k-t^u_{kj}\,da^j),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\theta^w_{i_1\ldots i_q}=\tilde{a}^w_u a^{k_1}_{i_1}\ldots a^{k_q}_{i_q}\,(dt^u_{k_1\ldots k_q}-t^u_{k_1\ldots k_q\ell}\,da^\ell),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\theta^w_{i_1\ldots i_p}=\tilde{a}^w_u a^{k_1}_{i_1}\ldots a^{k_p}_{i_p}\,dt^u_{k_1\ldots k_p},$$

где $\tilde{a}^i_k\cdot a^k_j=\delta^i_j$, $t^u_{k_1\ldots k_q}=\tilde{a}^{\ell_1}_{k_1}\ldots\tilde{a}^{\ell_q}_{k_q}a^u_{\ell_1\ldots\ell_q}$; $q=\overline{1,p-1}$.

путем подстановки в них значений $a^i=a^u=0$

$$(3.1)\begin{cases}\bar{\theta}^i=\theta^i|_{a^k=a^u=0}=0,\quad \bar{\theta}^j_k=\theta^j_k|_{a^i=a^u=0},\\ \bar{\theta}^v=\theta^v|_{a^i=a^u=0}=0,\quad \bar{\theta}^w_u=\theta^w_u|_{a^i=a^u=0},\\ \bar{\theta}^w_i=\theta^w_i|_{a^i=a^u=0},\ \ldots\\ \bar{\theta}^w_{i_1\ldots i_q}=\theta^w_{i_1\ldots i_q}|_{a^i=a^u=0},\ \ldots\end{cases}\quad(3)$$

$$\bar{\theta}^w_{i_1\ldots i_p}=\theta^w_{i_1\ldots i_p}|_{a^i=a^u=0},$$

а структурные уравнения для них получаются при этих же условиях, учитывая, что $\bar{\theta}^u=\bar{\theta}^i=0$, из структурных уравнений группы

$$(4.1)\begin{cases}d\theta^i=\theta^k\wedge\theta^i_k,\quad d\theta^i_k=\theta^j_k\wedge\theta^i_j,\\ d\theta^u=\theta^i\wedge\theta^u_i+\theta^v\wedge\theta^u_v,\quad d\theta^u_v=\theta^w_v\wedge\theta^u_w,\\ d\theta^u_i=\theta^v_j\wedge(\theta^u_v\delta^j_i-\theta^j_i\delta^u_v)+\theta^j\wedge\theta^u_{ij},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ d\theta^u_{i_1\ldots i_q}=\theta^v_{j_1\ldots j_q}\wedge(\theta^u_v\delta^{j_1}_{i_1}\ldots\delta^{j_q}_{i_q}-\theta^{j_1}_{i_1}\delta^{j_2}_{i_2}\ldots\delta^{j_q}_{i_q}\delta^u_v-\ldots-\theta^{j_q}_{i_q}\delta^{j_1}_{i_1}\ldots\delta^{j_{q-1}}_{i_{q-1}}\delta^u_v)-\\ \qquad-\theta^j\wedge\theta^u_{i_1\ldots i_q j},\end{cases}\quad(4)$$

$$d\theta^u_{i_1\ldots i_p}=\theta^v_{j_1\ldots j_p}\wedge(\theta^u_v\delta^{j_1}_{i_1}\ldots\delta^{j_p}_{i_p}-\theta^{j_1}_{i_1}\delta^{j_2}_{i_2}\ldots\delta^{j_p}_{i_p}\delta^u_v-\ldots-\theta^{j_q}_{i_q}\delta^{j_1}_{i_1}\ldots\delta^{j_{q-1}}_{i_{q-1}}\delta^u_v)$$

в качестве их ограничения на подгруппу G:

$$(5.1)\begin{cases}d\bar{\theta}^i=0,\ d\bar{\theta}^i_k=\bar{\theta}^j_k\wedge\bar{\theta}^i_j;\ d\bar{\theta}^u=0,\ d\bar{\theta}^u_v=\bar{\theta}^w_v\wedge\bar{\theta}^u_w;\\ d\bar{\theta}^u_i=\bar{\theta}^v_j\wedge(\bar{\theta}^u_v\delta^j_i-\bar{\theta}^j_i\delta^u_v),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ d\bar{\theta}^u_{i_1\ldots i_q}=\bar{\theta}^v_{j_1\ldots j_q}\wedge(\bar{\theta}^u_v\delta^{j_1}_{i_1}\ldots\delta^{j_q}_{i_q}-\bar{\theta}^{j_1}_{i_1}\delta^{j_2}_{i_2}\ldots\delta^{j_q}_{i_q}\delta^u_v-\ldots-\bar{\theta}^{j_q}_{i_q}\delta^{j_1}_{i_1}\ldots\delta^{j_{q-1}}_{i_{q-1}}\delta^u_v,\end{cases}\quad(5)$$

. . . .

$$d\bar\theta^u_{i_1\dots i_p}=\bar\theta^v_{j_1\dots j_p}\wedge(\bar\theta^u_v\delta^{j_1}_{i_1}\dots\delta^{j_p}_{i_p}-\bar\theta^{j_1}_{i_1}\delta^{j_2}_{i_2}\dots\delta^{j_p}_{i_p}\delta^u_v-\dots-$$
$$-\bar\theta^{j_p}_{i_p}\delta^{j_1}_{i_1}\dots\delta^{j_{p-1}}_{i_{p-1}}\delta^u_v). \qquad (5)$$

Таким образом, формы $\{\theta^i,\theta^u\}$ играют роль базовых форм, а формы $\theta^\alpha=\{\theta^i_j,\theta^u_v,\theta^u_i,\dots,\theta^u_{i_1\dots i_p}\}$ -слоевых форм расслоения $A^p_m(n)\xrightarrow{\pi}R^n$. Расщепление структурных уравнений [1] главного расслоения в нашем случае имеет следующий характер: $d\theta^i=\theta^k\wedge\theta^i_k$, $d\theta^u=\theta^i\wedge\theta^u_i+\theta^v\wedge\theta^u_v$, $d\theta^\alpha=\frac12 C^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\beta\wedge\theta^\gamma+\theta^i\wedge\theta^\beta_i$. Структурные постоянные $C^\alpha_{\beta\gamma}$ соответствуют структурным уравнениям (5) и являются структурными постоянными группы G изотропии элемента $0\in R^n$. Рассмотрим последовательность фактор-групп $G^1\leftarrow G^2\leftarrow\dots\leftarrow G^q\leftarrow\dots\leftarrow G^p=G\subset A^p_m(n)$, где $G^q=\left\{\left|\frac{0}{b^i_k}\right|\frac{0}{b^u_v}\left|\frac{b^u_i|\dots|b^u_{i_1\dots i_q}|}{}\right.\right\}$, и соответствующую последовательность G-структур [1] $\bar H^1(R^n,G^1)\leftarrow H^2(R^n,G^2)\leftarrow\dots\leftarrow\bar H^p(R^n,G)$. Редуцированное расслоение реперов $\bar H^q(R^n,G^q)\xrightarrow{\pi^q}R^n$ определяется следующими координатами: $\left|\frac{b^i}{b^i_k}\right|\frac{b^u}{b^u_v}\left|\frac{b^u_i|\dots|b^u_{i_1\dots i_q}|}{}\right.\xrightarrow{\pi^q}|b^i|b^u|$. Структурными формами G-структуры $\bar H^q(R^n,G^q)$ являются формы θ^i,θ^u -базовые, а $\theta^i_k,\theta^u_v,\theta^u_i,\dots,\theta^u_{i_1\dots i_q}$ -слоевые. Структурными уравнениями для форм $\theta^i,\theta^u,\theta^i_k,\theta^u_v,\theta^u_i,\dots,\theta^u_{i_1\dots i_q}$ G-структуры $\bar H(R^n,G^q)$ является соответственно подсистема (4.1) структурных уравнений (4) группы $A^p_m(n)$. Структурными уравнениями группы G^q является подсистема (5.1) системы уравнений (5).

При $q=1$ это будет подгруппа матриц вида $\left\|\frac{a^i_k}{a^u_i}\right|\frac{0}{a^u_v}\right\|\in GL(n,R)$ композиция $a\cdot b=\tilde b$ в группе G^q определяется формулами

$$\tilde b^j_k=a^j_i b^i_k,\quad \tilde b^w_v=a^w_u b^u_v,$$
$$\tilde b^w_i=a^w_u b^u_i+a^w_j b^j_i,$$
. . . .
$$\tilde b^w_{i_1\dots i_q}=\frac{1}{q!}(a^w_u b^u_{i_1\dots i_q}+a^u_{j_1\dots j_q}b^{j_1}_{i_1}\dots b^{j_q}_{i_q}).$$

Отметим, что в нашем случае порядок изотропии однородного пространства R^n относительно группы $A^p_m(n)$ равен p и при этом расслоение $\bar H(R^n,G^p)$ тождественно расслоению группы $A^p_m(n)\to R^n$.

Список литературы

1. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.-Проблемы геометрии, т.9, ВИНИТИ, М., 1979, с.49-53.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.15 1984

УДК 514.75

Ю.И. Попов

О ГОЛОНОМНОСТИ $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В работе приведены дифференциальные уравнения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения [6] в репере нулевого порядка $\mathcal{R}^0$. Дана геометрическая интерпретация голономности $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения, а также M-распределения и H-распределения, ассоциированных с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением.

При внешнем дифференцировании применяется оператор ∇, введенный в работе [4]. При фиксации центра распределения формы $\omega^{\bar{\mathcal{J}}}_{\bar{\mathcal{K}}}$ обозначаются $\pi^{\bar{\mathcal{J}}}_{\bar{\mathcal{K}}}$. Схема использования индексов такова: $\bar{\mathcal{I}},\bar{\mathcal{J}},\bar{\mathcal{K}},\dots=\overline{0;n}$; $\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K},\dots=\overline{1;n}$,

$p,q,s,\dots=\overline{1;\tau}$; $i,j,k,\dots=\overline{\tau+1;m}$; $\alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1;n-1}$;

$u,v,w=\overline{\tau+1;n-1}$; $a,b,c,\dots=\overline{1;m}$; $\sigma,\tau,\rho=\overline{1;n-1}$; $\hat\alpha,\hat\beta,\hat\gamma=\overline{m+1;n}$;

$\hat u,\hat v,\hat w=\overline{\tau+1;n}$.

1. Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n, отнесенное к подвижному реперу $\mathcal{R}=\{A_{\bar{\mathcal{J}}}\}$, дифференциальные уравнения которого имеют вид

$$dA_{\bar{\mathcal{J}}}=\omega^{\bar{\mathcal{K}}}_{\bar{\mathcal{J}}}A_{\bar{\mathcal{K}}}, \qquad (1)$$

$$\mathcal{D}\omega^{\bar{\mathcal{K}}}_{\bar{\mathcal{J}}}=\omega^{\bar{\mathcal{L}}}_{\bar{\mathcal{J}}}\wedge\omega^{\bar{\mathcal{K}}}_{\bar{\mathcal{L}}};\quad \sum_{\bar{\mathcal{J}}}\omega^{\bar{\mathcal{J}}}_{\bar{\mathcal{J}}}=0. \qquad (2)$$

Совместим вершину A_0 репера $\mathcal{R}$ с текущей точкой X пространства P_n, мы приведем структурные формы точки X к каноническому виду $\omega^{\mathcal{J}}_0$. Такой репер нулевого порядка обозначим $\mathcal{R}^0$.

О п р е д е л е н и е. Тройку распределений

$$\Delta\Lambda^{\hat u}_p\stackrel{def}{=}\nabla\Lambda^{\hat u}_p-\Lambda^{\hat u}_q\Lambda^{\hat v}_p\omega^q_{\hat v}+\omega^{\hat u}_p=\Lambda^{\hat u}_{p\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}_0, \qquad (3)$$

$$\Delta M^{\hat\alpha}_a\stackrel{def}{=}\nabla M^{\hat\alpha}_a-M^{\hat\alpha}_b M^{\hat\beta}_a\omega^b_{\hat\beta}+\omega^{\hat\alpha}_a=M^{\hat\alpha}_{a\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}_0, \qquad (4)$$