Список литературы

1. *Картан Э.* Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М.: ИЛ, 1949. 384 с.
2. *Cartan E., Schouten J.A.* On the geometry of groupmanifold of simple and semi-simple groups // Acad. van Wetens. Proc. Amsterdam, 1926. N29. S. 803-815.
3. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. М.: ИЛ, 1947. 360 с.
4. *Акивис М.А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977. 84 с.
5. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998. 83 с.

Бишоп Р., Криттенден Р. Геометрия многообразий. М.: Мир, 1967. 336 с.

Yu.I. Shevchenko

BUNCHES OF AFFINE CONNECTIONS ON LEE'S GROUP AND PARALLELIZED MANIFOLD

By comparing of Lee's group structure equations and corresponding affinely connected space we introduce bunch of affine connections on Lee's group. Three affine connections of Cartan – Schouten – Eisenhart, two of which without curvature and one without torsion, belong to this bunch. The bunch of affine connections is extended on the parallelized manifold, generalizing Lee's group. In the general case generalized bunch includes only two special affine connections: one without curvature and one without torsion.

УДК 514.76

Е.П. Шустова

(Казанский государственный университет)

ПОЛНЫЙ ЛИФТ СВЯЗНОСТИ В КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ ПОРЯДКА k

Получены формулы, позволяющие эффективно вычислять компоненты полного лифта линейной связности в касательное расслоение порядка k.

Под касательным расслоением [1] k-того порядка T^kM_n пространства аффинной связности M_n будем понимать множество k-струй гладких отображений γ: $R \to M_n$, где R это вещественная прямая. Пусть отображение γ: $R \to M_n$, k-струя $j_0^k\gamma$ которого служит элементом расслоения T^kM_n, задано в локальных координатах формулами $x^i=x^i(t)$ $(i=\overline{1,n})$, причем при (t=0 получается рассматриваемая точка $x \in M_n$. Тогда указанная k-струя отображения γ определяется точкой x и значениями первых k производных от функции $x^i(t)$ по t при (t=0. Пусть $(x^i; x^{n+i}; x^{2n+i}; ...; x^{kn+i})$ – локальная система координат в T^kM_n, где x^{mn+i} – производная порядка $m=\overline{1,k}$ от x^i по t, деленная на m!.

Для дальнейшей компактной записи удобно ввести в рассмотрение оператор D_a, действующий на некоторый дифференциально-геометрический объект **Ω,** заданный на базе $M_п$, следующим образом:

$$D_a[\Omega]=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{a}\frac{1}{i!}\partial_{p_1\dots p_i}\Omega\sum\limits_{l_1,\dots,l_i=1}^{a}\delta^a_{l_1\dots l_i}x^{l_1n+p_1}\dots x^{l_in+p_i}, & a=\overline{1,k};\\ \Omega, & a=0;\end{cases}$$

где

$$\delta^a_{l_1\dots l_i}=\begin{cases}1, & l_1+\dots+l_i=a;\\ 0, & l_1+\dots+l_i\neq a;\end{cases}\qquad p_1,\dots p_i=\overline{1,n}.$$

Здесь и везде далее используется правило суммирования Эйнштейна.

В следующем предложении приведем свойства этого оператора, которые будут необходимы при выводе рабочих формул для вычисления компонент полного лифта линейной связности, заданной на базе $M_п$.

Предложение 1. *Оператор D_a обладает следующими свойствами:*

$$D_a[\Phi+\Psi]=D_a[\Phi]+D_a[\Psi],\quad a=\overline{0,k}; \tag{1}$$

$$D_a[\Phi\Psi]=\sum_{a_1,a_2=0}^{a}\delta^a_{a_1,a_2}D_{a_1}[\Phi]D_{a_2}[\Psi],\quad a=\overline{0,k}; \tag{2}$$

$$D_a[\Phi\Psi\Theta]=\sum_{a_1,a_2,a_3=0}^{a}\delta^a_{a_1a_2a_3}D_{a_1}[\Phi]D_{a_2}[\Psi]D_{a_3}[\Theta],\quad a=\overline{0,k}; \tag{3}$$

$$\partial_{s_1n+s}D_a[\Phi]=\partial_sD_{a-s_1}[\Phi],\quad a=\overline{1,k}; \tag{4}$$

$$\partial_sD_a[\Phi]=D_a[\partial_s\Phi],\quad a=\overline{0,k}; \tag{5}$$

где Φ, Ψ, Θ — дифференциально-геометрические объекты, заданные на базе M_n.

Первая и пятая формулы этого предложения очевидны. Вторую и третью можно доказать индукцией по $a=\overline{0,k}$.. Четвертую – индукцией по $s_1=\overline{k,1}$ для любых $s=\overline{1,n}$, $a=\overline{1,k}$.

Пусть $\overset{c(j)}{f}$ – лифт индекса j функции f, заданной на базе $M_п$, в касательное расслоение порядка k, т.е. $\overset{c(j)}{f}=\frac{1}{j!}\frac{d^jf}{dt^j}$ – производная порядка $j=\overline{1,k}$ от f по t, деленная на J!.

Индукцией по $j=\overline{1,k}$ можно доказать, что лифт индекса j функции f, заданной на базе M_n, в касательное расслоение порядка k в локальных координатах $(x^{\alpha})_{\alpha=\overline{1,n(k+1)}}$ имеет вид: $\overset{c(j)}{f} = D_j[f]$.

Заметим, что $\overset{c(k)}{f} = D_k[f]$ – полный лифт функции f.

Тогда в голономном поле реперов $\partial/x\partial^{\alpha}$ координаты полного лифта векторного поля v, заданного на базе M_n, имеют вид:

$$\overset{c(k)}{v}{}^{an+i} = D_a[v^i], \quad a=\overline{0,k}, \tag{6}$$

Предложение 2. *В локальных координатах* $(x^{\alpha})_{\alpha=\overline{1,n(k+1)}}$ *компоненты* $\overset{c(k)}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ $(\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,n(k+1)})$ *полного лифта в* T^kM_n *линейной связности* Γ^i_{jk}, *заданной на базе* M_n, *вычисляются по формуле:*

$$\overset{c(k)}{\Gamma}{}^{an+i}_{bn+m\,cn+s} = D_{a-b-c}[\Gamma^i_{ms}], \quad b,c=\overline{0,a}, \quad a=\overline{0,k},$$

причем $b+c\le a$. *Остальные* $\overset{c(k)}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}=0$.

Доказательство. Из условия

$$\overset{c(k)}{\nabla}_{\overset{c(k)}{v}}\overset{c(k)}{w} = (\nabla_v w)^{c(k)}, \tag{7}$$

где $v=v^i\partial/\partial x^i$, $u=u^i\partial/\partial x^i$ – произвольные векторные поля на M_n и $\nabla_v u = v^s\nabla_s u$, находятся компоненты полного лифта $\overset{c(k)}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ линейной связности Γ^i_{jk} в рассматриваемое касательное расслоение порядка k.

Воспользовавшись определением ковариантной производной, а в правой части этого равенства и формулами (6) и (1), запишем условие (7) в координатном виде:

$$\overset{c(k)}{v}{}^{\sigma} = (\partial_{\sigma}\overset{c(k)}{w}{}^{an+i} + \overset{c(k)}{\Gamma}{}^{an+i}_{\mu\sigma}\overset{c(k)}{w}{}^{\mu}) = D_a[v^s\partial_s w^i] + D_a[v^s\partial_s w^m\Gamma^i_{ms}], \tag{7'}$$

$$a=\overline{0,k}, \quad i,s,m=\overline{1,n}, \quad \sigma,\mu=\overline{1,n(k+1)}.$$

При a = 0 условие (7') в силу формул (6) принимает вид:

$$v^s(w^m\overset{c(k)}{\Gamma}{}^i_{ms} + \overset{c(k)}{\Gamma}{}^i_{m_1n+m\,s}\overset{c(k)}{w}{}^{m_1n+m}) + \overset{c(k)}{v}{}^{s_1n+s}(\overset{c(k)}{\Gamma}{}^i_{m\,s_1n+s}w^m + \overset{c(k)}{\Gamma}{}^i_{m_1n+m\,s_1n+s}\overset{c(k)}{w}{}^{m_1n+m}) = v^s w^m\Gamma^i_{ms}.$$

Так как это условие должно выполняться для любых векторных полей v, w, заданных на базе, отсюда имеем: $\overset{c(k)}{\Gamma}{}^i_{ms} = \Gamma^i_{ms}$. Остальные $\overset{c(k)}{\Gamma}{}^i_{\beta\gamma} = 0$.

При $a \neq 0$, т.е. при $a=i_1=\overline{1,k}$, условие (7') в силу формул (6) и (2), (3), используемых соответственно в левой и правой частях этого равенства, принимает вид:

$$v^s \partial_s D_{i_1}[w^i] + \overset{c(k)}{v}{}^{s_1 n+s} \partial_{s_1 n+s} D_{i_1}[w^i] + \sum_{a_1,a_2=0}^{k} D_{a_1}[v^s] \overset{c(k)}{\Gamma}{}^{i_1 n+i}_{a_2 n+m\, a_1 n+s} D_{a_2}[w^m] =$$

$$= \sum_{a_1,a_2=0}^{i_1} \delta^{i_1}_{a_2 a_1} D_{a_1}[v^s] D_{a_2}[\partial_s w^i] + \sum_{a_1,a_2,a_3=0}^{i_1} \delta^{i_1}_{a_2 a_1 a_3} D_{a_1}[v^s] D_{a_2}[w^m] + D_{a_3}[\Gamma^i_{ms}], \quad s_1 = \overline{1,k}.$$

Заметим, что во второй сумме левой части ненулевые члены только при $s_1 = \overline{1,i_1}$. Видим, что воспользовавшись еще раз формулой (6), это условие можно записать в виде:

$$v^s \partial_s D_{i_1}[w^i] + \sum_{a_1=1}^{i_1} D_{a_1}[v^s] \partial_{a_1 n+s} D_{i_1}[w^i] + \sum_{a_1,a_2=0}^{k} D_{a_1}[v^s] D_{a_2}[w^m] \overset{c(k)}{\Gamma}{}^{i_1 n+i}_{a_2 n+m\; a_1 n+s} =$$

$$= v^s \partial_s D_{i_1}[w^i] + \sum_{a_1=1}^{i_1} D_{a_1}[v^s] D_{i_1-a_1}[\partial_s w^i] + \sum_{a_1,a_2=0,\, a_1+a_2 \le i_1}^{i_1} D_{a_1}[v^s] D_{a_2}[w^m] D_{i_1-a_1-a_2}[\Gamma^i_{ms}].$$

Воспользовавшись теперь формулами (5) и (4), приходим к тому, что условие (7') при $a \neq 0$, т.е. при $a = i_1 = \overline{1,k}$, имеет вид:

$$\sum_{a_1,a_2=0}^{k} D_{a_1}[v^s] D_{a_2}[w^m] \overset{c(k)}{\Gamma}{}^{i_1 n+i}_{a_2 n+m\; a_1 n+s} = \sum_{a_1,a_2=0,\, a_1+a_2 \le i_1}^{i_1} D_{a_1}[v^s] D_{a_2}[w^m] D_{i_1-a_1-a_2}[\Gamma^i_{ms}].$$

Так как это условие должно выполняться для любых векторных полей v, w, заданных на базе, отсюда имеем:

$$\overset{c(k)}{\Gamma}{}^{i_1 n+i}_{a_2 n+m\; a_1 n+s} = \begin{cases} D_{i_1-a_2-a_1}[\Gamma^i_{ms}], & a_1, a_2 = \overline{0,i_1}, \quad a_1 + a_2 \le i_1; \\ 0, & a_1, a_2 = \overline{0,k}, \quad a_1 + a_2 > i_1. \end{cases}$$

Тем самым предложение доказано.

Список литературы

1. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985. 264 с.

E.P. Shustova

COMPLETE LIFT OF CONNECTION
TO THE k-TH ORDER TANGENT BUNDLE

For a linear connection ∇ on a manifold M_n we give formulas for explicit calculation of components of complete lift of ∇ to the k-th order tangent bundle $T^kM_п$.

УДК 514.75

Е.П. Юрова

(Калининградский государственный университет)

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЕНИЯ И ГЛАВНЫЕ ТОЧКИ МНОГООБРАЗИЯ ГИПЕРКВАДРИК

Изучается (n-1)-мерное многообразие невырожденных центральных гиперквадрик аффинного пространства A_n. Введены понятия φ-характеристических направлений и φ-характеристических главных точек, обобщающих соответствующие понятия теории точечных отображений. Доказаны предложения, в которых раскрывается их геометрическая характеристика.

В статье [1] определены и геометрически охарактеризованы порождаемые многообразием V_{n-1} в 1-й дифференциальной окрестности центра C гиперквадрики Q аффинные связности 💣, g, γ, $\overset{0}{\gamma}$. Тензор деформации $T^k_{ij} = -\frac{1}{2}a^{kt}b_{ijk}$ $(i,... = \overline{1, n-1})$ также задает на поверхности (C) аффинную связность. Обозначим ее буквой T. Объектом 1-го порядка $\{a_{ij}, b_{ijk}\}$ многообразия V_{n-1} для каждой точки $A \in (C)$ определяются алгебраические многообразия

$$(b_{tij} - \tfrac{1}{2} b_{ijt})x^i x^j - 2a_{tl}x^l = 0, \tag{1}$$

$$b_{tij}x^i x^j - 2a_{tl}x^l = 0, \tag{2}$$

$$b_{ijt}x^i x^j + 4a_{tl}x^l = 0. \tag{3}$$

Обозначим их соответственно символами I_g, I_γ, I_T. Пусть φ принимает значения g, γ, T. Многообразие I_φ содержит точку A и в общем случае является алгебраическим многообразием размерности 0 и порядка 2^{n-1}, лежащим в касательной к поверхности (C) в точке A гиперплоскости Γ_Q. Рассмотрим множество χ_φ прямых, содержащих точку A и имеющих с многообразием I_φ 2 общие точки.

Определение 1. Прямая множества χ_φ называется φ-характеристической прямой многообразия V_{n-1} в точке A, а задаваемое этой прямой направление – φ-характеристическим направлением многообразия V_{n-1} в точке A.